ABRÉGÉS

Physique

C. ERNST
M. GABRIEL
G. GERMAIN

MASSON

CHEZ LE MEME EDITEUR

Dans la série des Abrégés :

ABREGE DE CHIMIE.

Tome 1. — *Chimie générale.* Cours, 500 exercices, 120 tests, par G. GERMAIN, R. MARI avec la collaboration de D. Burnel. *Collection Comprendre et appliquer : chimie.* 1980, 2e tirage, 2e édition revue et augmentée, 288 pages, 62 figures, 1 encart libre.

Tome 2. — *Chimie organique.* Cours, 300 exercices, 100 tests, par V. LOPPINET avec la participation de G. Germain, R. Mari et la collaboration de D. Burnel. *Collection Comprendre et appliquer : chimie.* 1976, 368 pages, avec figures.

ABREGE DE STATISTIQUE, par S. GELLER. 1979, 3e édition, 236 pages, 122 figures.

ABREGE DE MATHEMATIQUES, par S. GELLER. 1979, 2e édition, 256 pages, 233 figures.

ABREGE DE BIOPHYSIQUE, par A. BERTRAND, D. DUCASSOU, J.-C. HEALY, J. ROBERT.

Tome 1. — *Physico-chimie. Electrophysiologie.* Cours, exercices, tests. 1979, 208 pages, 150 figures.

Tome 2. — *Utilisation médicale des rayonnements - Vision - Audition.* Cours, exercices, tests. 1980, 264 pages, 173 figures.

ANNALES PCEM.

Probabilités et statistique, par J.-L. MATHIEU et J.-M. MONNEZ. 1980, 128 pages.

Physique, par C. ERNST. 1980, 128 pages.

Chimie, par G. GERMAIN et V. LOPPINET. 1980, 128 pages.

PHYSIQUE ET BIOPHYSIQUE (PCEM).

Fascicule 1. — *Mécanique, thermodynamique, physico-chimie,* par Ch. BENEZECH, J. LLORY et collaborateurs. 1973, 480 pages, 202 figures.

Fascicule 2. — *Electricité, électrophysiologie, électronique,* par L. GOUGEROT. 1973, 470 pages, 281 figures.

Fascicule 3. — *Biophysique sensorielle. Audition. Vision. Equilibre vestibulaire,* par M. BURGEAT, Y. GRALL et D. LOTH. 1973, 312 pages, 132 figures.

BIOPHYSIQUE DES RADIATIONS par J. DUTREIX, A. DESGREZ, B. BOK et J.-M. VINOT. 1980, 244 pages, 116 figures.

COMPRENDRE ET APPLIQUER LA THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE, par G. GERMAIN, M. NOTIN et H. DEMANGE.

Tome I. — *Principes, loi d'action de masse.* 1976, 80 pages, 11 figures, 1 encart.
Tome II. — *Potentiel Chimique. Electrochimie, équilibre entre phases.* 1979, 72 pages, 59 figures, 1 encart.

ABRÉGÉS

PHYSIQUE

mécanique - thermodynamique

électricité - mouvements

vibratoires, optique - radioactivité

cours - exercices - tests

Claude ERNST
Marc GABRIEL
Gérard GERMAIN
Université de Nancy I

MASSON
Paris New York Barcelone Milan 1981

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droits ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© *Masson, Paris, 1981*
ISBN : 2-225-69113-4

MASSON S.A. 120, Bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
MASSON PUBLISHING U.S.A. Inc. 14 East 60 th Street, New York, N.Y. 10022
TORAY MASSON S.A. Balmes 151, Barcelona 8
MASSON ITALIA EDITORI S.p.A. Via Giovanni Pascoli 55, 20133 Milano

AVANT-PROPOS

Cet abrégé de physique s'adresse essentiellement aux étudiants de PCEM. Il devrait également intéresser les étudiants du DEUG Nature et Vie et de Pharmacie.

Le contenu a été défini à partir d'une étude de sujets proposés à l'épreuve de physique de PCEM I dans toute la France. Il doit donc permettre à l'ensemble de ces étudiants de préparer ce concours dans les meilleures conditions. Ils pourront y retrouver le programme traité par leur professeur en éliminant les chapitres qui ne font pas partie de l'enseignement spécifique de leur université.

L'aspect condensé, spécifique des abrégés, pourra heurter certains esprits plus curieux. Il ne s'agit ni d'un traité, ni d'un ouvrage de référence, mais bien d'un manuel concis et réaliste rappelant les principaux résultats de la physique nécessaires à la formation de tout médecin et tout scientifique se destinant aux Sciences de la vie.

Cet abrégé a donc comme objectif :
- l'acquisition des définitions, notions élémentaires et lois générales;
- l'application concrète dans quelques cas simples de ces acquisitions à l'aide des exercices corrigés proposés;
- le contrôle par le lecteur de son assimilation en proposant à la fin de chaque partie des tests dont les réponses se trouvent à la fin du livre.

L'ouvrage est divisé en cinq parties :
- mécanique;
- thermodynamique;
- électricité;
- mouvements vibratoires, optique;
- radioactivité.

En thermodynamique, les principaux résultats de thermodynamique chimique sont rappelés mais non développés. Par ailleurs, les auteurs ont essayé de proposer un cours de physique destiné à préparer l'enseignement de la Biophysique.

TABLE DES MATIERES

MECANIQUE 11

Dynamique du point matériel 12
Principe fondamental de la dynamique 12
Principales forces (12) - Equations déduites du principe fondamental (14)
Théorème du moment cinétique 19
Pourquoi les planètes ont-elles une trajectoire plane ? (19)
Energie cinétique - Energie potentielle 19
Travail d'une force (19) - Théorème de l'énergie cinétique (21) - Energie mécanique (23)

Chocs et collisions 29
Conservation de la quantité de mouvement 29
Chocs élastiques ou inélastiques 30
L'effet Compton 31

Statique 34
Equilibre d'un point matériel 34
Conditions d'équilibre. Stabilité (34) - Force dérivant d'un potentiel (34) - Point matériel lié. Contacts sans frottement (35) - Contact avec frottement (35)
Equilibre du solide 36
Caractéristiques d'un solide (36) - Conditions d'équilibre (36)

Dynamique du solide 38
Mouvements de translation 38
Cas particulier important : rotation autour d'un axe 38
Relation fondamentale (38) - Principaux moments d'inertie (39) - Autres relations importantes (39)

Mécanique des fluides 41
Statique 41
Relation fondamentale (41) - Poussée d'Archimède (41)
Dynamique 42
Formule de Bernoulli (42) - Orifice dans une paroi : formule de Torricelli (43) - Mesure des pressions : manomètres (43) - Effet d'une diminution de section (44) - Ecoulements laminaires. Viscosité (45) - Turbulence. Nombre de Reynolds (48) - Résistance à l'avancement (49) - Vitesse de sédimentation. Centrifugation (50)
Capillarité 51
Tension superficielle (51) - Capillarité. Loi de Jurin (52) - Ascension entre des lames verticales (53).
Tests 53

THERMODYNAMIQUE 55

Premier principe 56
Pression - température - chaleur, travail 56
Equation caractéristique (58) -Propriétés des fonctions (60) - Propriétés des grandeurs extensives (61) - Energie (62) - Chaleur (63) - Travail (64)
Energie interne - Enthalpie 65
Enoncé du premier principe (65) - Transformation quasi statique (69) - Applications du 1er principe aux systèmes ouverts, métabolisme basal (70) - Enthalpie (71)

Deuxième principe 74
Entropie - Energie libre - Enthalpie libre 74
Enoncé du deuxième principe (74) - Interprétation microphysique de l'entropie (74) - Interprétation macroscopique de la création d'entropie d'un système (76) - Troisième principe et entropie de réaction (80) - Energie libre (80) - Enthalpie libre (80) - Enthalpie libre de réaction (83) - Calcul de la constante d'équilibre d'une réaction (84)
Potentiels chimiques - Electrochimie - Changement de phases 84
Potentiels chimiques (84) - Electrochimie (88) - Changements d'état d'un corps pur (90)
Tests 92

ELECTRICITE 93

Electrostatique 94
Champ électrostatique 94
Charges électriques (94) - Atomes et ions (94) - Loi de Coulomb (94) - Principe de superposition (95) - Champ électrique (96) - Distribution de charges continues (97) - Théorème de Gauss (98) - Principaux résultats (98)
Potentiel électrostatique 99
Circulation du vecteur E (99) - Détermination du potentiel (100) - Champ et potentiel (100) - Travail des forces électrostatiques (101)
Dipôles électriques 102
Polarisation des molécules (102) - Dipôle dans un champ électrique (103) - Potentiel et champ créés par un dipôle (103)
Condensateurs 104
Conducteurs en équilibre. Capacité (104) - Condensateurs (105) - Le condensateur plan (106) - Limitation des capacités (107) - Association de condensateurs (108)

Electrocinétique 110
Charges en mouvement dans un conducteur 110
Mobilité des charges (110) - Intensité. Densité de courant (110) - Conductivité. Résistivité (111) - Résistance. Loi d'Ohm (111) - Unités électriques (112)
Circuits en courant continu 113
Eléments des circuits (113) - Lois de Kirschoff (114) - Association de résistances (116) - Energie. Loi de Joule (117)

Courants variables 118
Décharge d'un condensateur (119) - Energie emmagasinée par un condensateur (120) - Charge d'un condensateur (121) - Régime transitoire avec une self (123)

Circuits en courant alternatif 124
Amplitudes et valeurs efficaces 124
Définitions (124) - Effet Joule en courant sinusoïdal (124) - Intensité et tension efficaces (125)
Mise en équations des circuits 126
Circuit avec résistance et self en série (126) - Circuit avec résistance et condensateur en série (127) - Un circuit résonnant : R, L et C en série (128)
Utilisation des nombres complexes 130
Représentation d'une tension ou d'un courant (130) - Notion d'impédance (131) - Puissance en courant alternatif (133)

Dynamique des particules chargées - Magnétisme 134
Forces électrostatiques sur des charges en mouvement 134
Effet d'un champ électrique longitudinal (134) - Effet d'un champ électrique transversal (135)
Force magnétique sur une charge en mouvement 136
Effet d'un champ magnétique (136) - Les trajectoires possibles (136) - L'effet Hall (138)
Le champ magnétique 139
Champ créé par des charges en mouvement (139) - Champ créé par des circuits (139)
Force magnétique sur un courant 141
Loi de Laplace (141) - Interaction de deux courants parallèles (141) - Travail des forces magnétiques (142)
Force électromotrice induite 143
Relation fondamentale (143) - Self induction (144) - Energie emmagasinée dans une self (144)

Tests 145

MOUVEMENTS VIBRATOIRES - OPTIQUE 147

Mouvements vibratoires 148
Phénomènes périodiques 148
Définitions (148) - Phénomènes périodiques sinusoïdaux (148)
Propagation des mouvements vibratoires 149
Propagation d'un ébranlement transversal unique (148) - Ebranlement longitudinal (150) - Vibrations transversales entretenues (151) - Théorème de Fourier (153) - Principe de superposition (154)
Stroboscopie 155
Méthode expérimentale (155) - Explication du phénomène (155) - Conséquences (156)
Interférences 156
Composition de deux vibrations sinusoïdales (156) - Franges d'interférences (157) - Exemples (159)

Battements 161
Ondes stationnaires 162
Nature vibratoire du son 165
Propagation du son (165) - Célérité du son dans les gaz (165) - Lois (166) dans l'eau et les solides (166)
Effet Doppler 167
La source se rapproche (167) - s'éloigne (168) - Cas général (169)

Optique - Généralités 171
Propagation des vibrations lumineuses 171
Les ondes électromagnétiques (171) - Sources de lumière (171) - Propagation rectiligne (172) - Réflexion et réfraction (173) - Principe de Fermat (174)

Eléments des instruments d'optique 175
Généralités 175
Définition (175) - Stigmatisme (176) - Aplanétisme (176)
Miroirs plans 177
Construction de l'image d'un objet (177) - Stigmatisme (177) - Miroirs tournants (177)
Dioptre plan 178
Construction (178) - Stigmatisme (178) - Lame à faces parallèles (178)
Prisme 179
Marche d'un rayon (179) - Stigmatisme (180) - Dispersion de la lumière blanche (181)
Dioptre sphérique 181
Stigmatisme rigoureux (181) - approché (182) - Position de l'image d'un objet (182) - Foyers (182) - Grandissement (184)
Lentilles minces 185
Définitions (185) - Image d'un objet (185) - Eléments de la lentille (186) - Construction (186) - Trajet d'un faisceau de rayons parallèles (187) - Vergence (188)
Systèmes centrés 189
Définitions (189) - Construction de l'image d'un objet AB (190)
L'œil 192
Oeil normal (192) - Amplitude d'accomodation (192) - Presbytie (192) - Défauts de l'œil (193) - Champ de vision distincte (193)

Les instruments d'optique 196
Loupe 196
Construction (196) - Mise au point (196) - Puissance (197) - Grossissement (197)
Microscope 198
Construction (198) - Définitions (198) - Grossissement (199)

Interférences lumineuses 200
Calcul de la différence de marche (200) - de l'interfrange (201) - Dispositifs expérimentaux (201) - Franges localisées (203) - Phénomènes en lumière polychromatique (203)

Tests 204

RADIOACTIVITE 208

Rappel sur la constitution du noyau 208
Les différents nucléons (208) - Relation entre les nucléons (208) - Energie de liaison (208) - Forces nucléaires (210) - Fission (210) - Fusion (210)
Réactions nucléaires 211
Lois de conservation (211) - Les différents types de radioactivité (211) - Cinétique des réactions (213)
Détection des rayonnements 214
Détecteurs à gaz (214) - solides (215)
Applications de la radioactivité 215

Tests 216

Réponses aux tests 217

Index alphabétique des matières 223

MECANIQUE

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

L'étude du mouvement d'un point matériel (c'est-à-dire possédant une masse) soumis à l'action de forces diverses est d'une grande importance en mécanique. Bien qu'il n'existe aucun objet, doté d'une masse, qui soit réellement ponctuel, de nombreux problèmes sont résolus en étudiant le mouvement d'un point, soit que l'objet, suffisamment petit, puisse être assimilé à un point (un électron à notre échelle par exemple), soit qu'un point joue un rôle particulièrement important (centre de gravité d'un solide).

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Toute la dynamique - l'étude du mouvement (d'un point ou d'un système) - repose sur une relation liant la cause du mouvement, la force, à sa conséquence la variation de vitesse, l'accélération, du point; c'est le *principe fondamental de la dynamique* :

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{\gamma}}$$

C'est une relation *vectorielle* où :

$\vec{F}$ est la *somme des forces* appliquées au point (exprimées en newtons, N, dans le système international SI)

$\vec{\gamma}$ est l'*accélération* du point ($m.s^{-2}$)

m est la *masse* du point (kg)

Elle porte sur des grandeurs *instantanées*, c'est-à-dire qu'elle doit être vérifiée à chaque instant au cours du mouvement.

☐ **Principales forces.** — Elles peuvent avoir une origine mécanique :

- la force de gravitation due au fait que deux points matériels s'attirent; un point A de masse m, mis en présence d'un autre, A' de masse m', subit la force :

$$\boxed{\vec{F} = G\frac{m\,m'}{d^2}\vec{u}}$$

avec G : constante de gravitation ($6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I.)

d : distance des deux points

$\vec{u}$: vecteur unitaire dirigé vers A'.

Remarque : A' subit de la part de A la force $-\vec{F}$.

- la pesanteur est un cas particulier de la précédente. Elle change avec l'altitude; toutefois, si celle-ci varie peu par rapport au rayon terrestre (6366 km, valeur moyenne - en pratique 6400 km est une approximation convenable), on peut la considérer comme constante. Dans ce cas, tous les corps soumis à la seule pesanteur ont la même accélération g, dite *accélération de la pesanteur* au lieu considéré ($9{,}81\ m.s^{-2}$ à Paris).

- **les forces exercées par un système élastique** ont une intensité proportionnelle à l'écart par rapport à la position d'équilibre. Un point M attaché à un ressort dont l'autre extrémité O est fixée subit la force :

$$\boxed{\vec{F} = k(l - l_0)\vec{u}}$$

avec k : constante appelée *raideur* du ressort ($N.m^{-1}$ ou $kg.s^{-2}$)

$l - l_0$: allongement ($l > l_0$) ou compression ($l < l_0$) du ressort par rapport à sa longueur à l'équilibre,

$\vec{u}$: vecteur unitaire dirigé de M vers O.

- **la force de frottement visqueux** est exercée sur un corps en mouvement dans un fluide; elle est proportionnelle à la vitesse :

$$\boxed{\vec{F} = - f\vec{v}}$$

avec f : coefficient de frottement ($kg.s^{-1}$) ou terme d'amortissement (voir plus loin).

$\vec{v}$: vitesse par rapport au fluide.

Le signe − indique que la force de frottement s'oppose au déplacement.

- **une force de frottement** s'exerce aussi quand un point se déplace sur une **surface**, son module est :

$$\boxed{F = f\,N}$$

où f est le coefficient de frottement et N la réaction normale de la surface.

- **la résistance de l'air** est également une force de frottement mais elle est proportionnelle au *carré* de la vitesse :

$$\boxed{\vec{F} = - \alpha\, v^2 \vec{u}}$$

avec α : constante dépendant de la composition et de la pression de l'air ainsi que de la section principale du corps en mouvement (voir Mécanique des Fluides).

v : module de la vitesse

$\vec{u}$: vecteur unitaire de même sens que $\vec{v}$.

On rencontre souvent des forces d'origine électromagnétique (voir Electrostatique et Magnétisme) :

- **la force électrostatique** résulte de l'interaction de deux charges électriques; une charge q placée en A, en présence d'une charge q' placée en A' subit la force :

$$\boxed{\vec{F} = k\frac{qq'}{d^2}\vec{u}}$$

avec k : constante valant 9.10^9 SI; on écrit parfois $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ où ε_0 est la *permittivité* du vide

q, q' : charges en coulombs (C)

d : distance AA'

$\vec{u}$: vecteur unitaire dirigé de A' vers A.

Il en résulte que les charges se repoussent si elles sont de même signe et qu'elles s'attirent dans le cas contraire.

- **la force magnétique** est subie par une charge q en mouvement dans un *champ magnétique* $\vec{B}$

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})}$$

avec $\vec{v}$: vitesse de la charge.

- **interactions entre particules :** elles exercent entre elles des forces électrostatiques, gravitationnelles (en général négligeables vis-à-vis des autres), de répulsion à courte distance.

☐ **Equations déduites du principe fondamental.** — Si le point est repéré par ses coordonnées cartésiennes x(t), y(t), z(t), on a

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \left| \begin{matrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{matrix} \right. \quad \text{et } \vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} \left| \begin{matrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{matrix} \right.$$

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Comme, en général, $\vec{F}$ peut dépendre de la position du point ainsi que de sa vitesse, ces trois équations constituent un système de trois équations différentielles du second ordre dont les fonctions inconnues sont x(t), y(t) et z(t). Ces dernières sont déterminées en intégrant le système; les constantes d'intégration sont calculées en utilisant des positions et des vitesses connues à un instant particulier : on connaît souvent les conditions initiales, c'est-à-dire la position et la vitesse à l'instant t = 0.

Remarque : on étudie fréquemment des mouvements rectilignes. Dans ce cas, on obtient seulement une équation différentielle, ce qui simplifie la résolution.

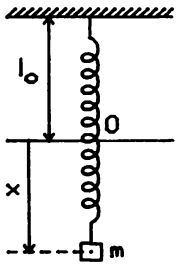
Exemple : une masse, un ressort et un frottement

On se propose d'étudier le mouvement d'un point pesant qu'on suspend à un ressort, le milieu exerçant un frottement visqueux.

Les conditions initiales sont : longueur du ressort = l_0, longueur au repos, vitesse nulle.

Le mouvement étant vertical on peut travailler sur un axe vertical descendant (par exemple) avec comme origine O, la position initiale du point.

A un instant t quelconque du mouvement, le système se présente ainsi :



position initiale

Les forces s'exerçant *sur le point* sont :
la tension du ressort : $-k(l_0+x-l_0) = -kx$ dirigée vers le haut si x est positif;
la pesanteur mg dirigée vers le bas;

le frottement $-fv = -f\dfrac{dx}{dt}$ opposé à la vitesse.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$$-kx + mg - f\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

soit $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + f\dfrac{dx}{dt} + kx = mg$

ou, en posant $\dfrac{f}{m} = \alpha$ et $\dfrac{k}{m} = \beta$:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + \beta x = g} \qquad (1)$$

Résolution de cette équation différentielle
* Solution générale de l'équation sans second membre : fonctions $x_1(t)$ vérifiant

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \alpha\frac{dx_1}{dt} + \beta x_1 = 0 \qquad (2)$$

On cherche des solutions de la forme $x_1(t) = e^{rt}$. On a :

$$\frac{dx_1}{dt} = r\,e^{rt} \text{ et } \frac{d^2x_1}{dt^2} = r^2\,e^{rt}$$

soit $(r^2+\alpha r+\beta)e^{rt} = 0$

d'où l'équation caractéristique $r^2 + \alpha r + \beta = 0$ (3)
dont le discriminant vaut $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$.

Si Δ est positif, (3) possède 2 racines réelles négatives $-r_1$ et $-r_2$ (somme des racines $-\alpha$ négative, produit β positif); on en tire

$$x_1 = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t}$$

où A et B sont les constantes d'intégration.

Si Δ est négatif, (3) possède 2 racines complexes conjuguées

$$r_1 = \frac{-\alpha + i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad ; \quad r_2 = \frac{-\alpha - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

et $x_1 = C\, e^{-\frac{\alpha t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t + \varphi\right)$

avec les constantes d'intégration C et φ.

Si Δ est nul, (3) possède une seule racine $r = -\frac{\alpha}{2}$ et on peut écrire x_1 sous la forme $x_1 = (Dt + E)e^{-\frac{\alpha t}{2}}$ où D et E sont les constantes d'intégration.

Remarque : dans les trois cas, $x_1(t) \to 0$ quand $t \to \infty$; $x_1(t)$ représente le *régime transitoire.*

* Solution particulière de l'équation complète :
on cherche *une* solution $x_2(t)$ de l'équation (1). Le second membre étant constant on essaye une fonction constante soit :

$$x_2(t) = \frac{g}{\beta} = \frac{mg}{k}$$

puisqu'alors $\quad \frac{dx_2}{dt} = 0 \text{ et } \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0$

* La solution générale de (1) est donc :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \begin{cases} A\, e^{-r_1 t} + B\, e^{-r_2 t} + \dfrac{mg}{k} & (4) \\ \text{ou } Ce^{-\frac{\alpha t}{2}} \cos\left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} t + \varphi\right) + \dfrac{mg}{k} & (5) \\ \text{ou } (Dt + E)\, e^{-\frac{\alpha t}{2}} + \dfrac{mg}{k} & (6) \end{cases}$$

Les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ permettent de déterminer les constantes d'intégration :

* pour l'équation (4)

$$A + B + \frac{mg}{k} = 0 \; ; \quad - r_1 A - r_2 B = 0$$

soit $$A = \frac{mg\, r_2}{k(r_1 - r_2)} \quad \text{et} \quad B = \frac{- mg\, r_2}{k(r_1 - r_2)}$$

* pour l'équation (5)

$$C \cos \varphi + \frac{mg}{k} = 0$$

$$- C \left\{ \frac{\alpha}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \sin \varphi \right\} = 0$$

soit $$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\alpha}{\sqrt{-\Delta}} \quad \text{et} \quad C = - \frac{mg}{k \cos \varphi}$$

* pour l'équation (6)

$$E + \frac{mg}{k} = 0 \; ; \quad D - \frac{\alpha}{2} E = 0$$

soit $$E = - \frac{mg}{k} \quad \text{et} \quad D = \frac{\alpha\, mg}{2k} = \frac{f\, g}{2k}$$

Remarque 1 : dans les trois cas, $x(t) \to \frac{mg}{k}$ quand $t \to \infty$.

Ceci correspond à la position d'équilibre; si le point est à cet endroit avec une vitesse nulle, son poids est juste équilibré par la tension du ressort (le frottement n'intervient pas); l'équation (1) donne alors

$$\frac{k}{m} x = g \quad \text{soit } x = \frac{mg}{k}.$$

Remarque 2 : dans le cas des équations (4) et (6), la position d'équilibre est atteinte par un mouvement *apériodique*; l'équation (6) correspond au régime *critique* pour lequel la position d'équilibre est atteinte le plus rapidement. Dans le cas de l'équation (5) la position d'équilibre est atteinte après des *oscillations* autour de celle-ci; le mouvement est oscillatoire amorti.

Remarque 3 : la solution générale de l'équation sans second membre correspond au régime *transitoire* et la solution particulière de l'équation complète au *régime permanent*. Ceci est spécialement utile quand on ne cherche que le régime permanent (en électricité par exemple, pour des courants alternatifs); on est alors dispensé d'une partie souvent difficile de la résolution.

Exercice. — Vitesse limite dans un liquide.
Une bille de masse m soumise à son poids, est lâchée à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale v_0 verticale descendante dans un liquide opposant une résistance proportionnelle à la vitesse $(-fv)$.
1) Trouver la vitesse limite v_L atteinte par la bille.
2) Exprimer la vitesse en fonction du temps.

Choisissons un axe vertical Oz descendant avec comme origine la position initiale de la bille.
1)La projection du principe fondamental de la dynamique sur Oz donne :

$$mg - fv = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

Si la vitesse limite est atteinte alors v est constante $(v = v_L)$ et $\frac{dv}{dt}$ est nul.

De (1) on tire :

$$v_L = \frac{mg}{f}$$

Pour cette question, il n'était pas utile de résoudre l'équation (1); on a simplement montré qu'une solution particulière pouvait être v = constante (cf. remarque 3 précédente).

2) Résolvons l'équation (1) en la mettant sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{f}{m}v = g$$

Solution générale $v_1(t)$ de l'équation sans second membre :

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{f}{m}v_1 = 0 \quad \text{soit } v_1(t) = K\, e^{-(f/m)t}$$

Solution particulière de l'équation complète :

$$v_2 = v_L \qquad \text{(voir question 1)}$$

La solution générale est donc

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = K\, e^{-(f/m)t} + v_L$$

Détermination de K :
à $t = 0$, $v = v_0 = K + v_L$ soit $K = v_0 - v_L$

D'où : $v = (v_0 - v_L)e^{-(f/m)t} + v_L$

On en tire un résultat important : quelle que soit la vitesse initiale v_0, v tend vers v_L quand t tend vers l'infini. En théorie, la vitesse limite n'est atteinte qu'au bout d'un temps infini; en pratique, on considère le

régime transitoire terminé quand v est suffisamment proche de v_L, par exemple quand $\frac{|v - v_L|}{v_L} < 10^{-2}$. Généralement, la durée du régime transitoire est assez petite pour pouvoir être négligée dans les calculs (cas de la vitesse de sédimentation par exemple).

THEOREME DU MOMENT CINETIOUE

Quand un point joue un rôle particulier (le centre de la Terre pour la pesanteur, par exemple), il peut être commode d'utiliser une conséquence du principe fondamental de la dynamique, le théorème du moment cinétique :

$$\vec{S} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

$\vec{l} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ moment cinétique

$\vec{S} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ moment de la force appliquée

$m\vec{v}$ quantité de mouvement.

☐ **Pourquoi les planètes ont-elles une trajectoire plane ?** — Pour simplifier, considérons une planète (la Terre par exemple) tournant autour du Soleil. L'origine O étant choisie au centre du Soleil et la planète étant en M nous avons $\vec{S} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$

où $\vec{P}$, le poids de la planète, est dirigé de M vers O. Le moment cinétique est donc nul ($\overrightarrow{OM}$ et $\vec{P}$ sont colinéaires) :

$$\vec{S} = \vec{0} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

On en tire que $\vec{J} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ est un vecteur constant (en module, en direction et en sens). Comme $\vec{J}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OM}$ (et aussi à $\vec{v}$ – propriété du produit vectoriel), on en conclut que $\overrightarrow{OM}$ reste dans un plan fixe : le plan orthogonal à $\vec{J}$ passant par O.

ENERGIE CINETIQUE - ENERGIE POTENTIELLE

☐ **Travail d'une force.**

Définitions

Si $\vec{dl}$ est un déplacement suffisamment petit pour que la force $\vec{F}$ appliquée au point reste constante, le *travail* de $\vec{F}$ lors de ce déplacement est :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

Ce travail qui s'exprime en joules (J) dans le Système International, est une grandeur *scalaire;* quand il est positif c'est un *travail moteur,* quand il est négatif c'est un *travail résistant.*

Si le déplacement n'est plus un infiniment petit, le travail est obtenu par une intégration; en passant de A à B on a :

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

En général, la valeur du travail dépend du chemin suivi.

Exercice. — *Dans le plan xOy, la force $\vec{F}$ exercée sur un point M(x,y) dépend de l'abscisse de M :*

$$\vec{F} \ (F_x = 2x, \ F_y = x)$$

Calculer le travail de $\vec{F}$ quand M passe de O(0,0) à A(1,1)
a) le long du segment OA,
b) en suivant le segment OB, avec B(1,0), puis le segment BA.
Toutes les grandeurs sont exprimées en SI.

a) Ici les coordonnées dx et dy d'un petit déplacement $\vec{dl}$ sont égales; le *le travail de $\vec{F}$* lors de ce petit déplacement est :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F_x \, dx + F_y \, dy$$

$$dW = 2x.dx + x.dx = 3x.dx$$

Le travail total vaut donc :

$$W_a = \int_{OA} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_0^1 3x \, dx$$

$$\text{soit } W_a = 3 \int_0^1 x \, dx = 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$W_a = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ J}$$

b) Dans ce cas, les conditions sont différentes sur les deux parties de la trajectoire :

• sur OB, on a $\vec{dl}(dx,0)$, $\vec{F} \cdot \vec{dl} = F_x \, dx + F_y \, dy = 2x \, dx$

et $$\int_{OB} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_0^1 2x \, dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

• sur BA, on a $\vec{dl}(0,dy)$, $x = 1$ et $\vec{F}.\vec{dl} = F_x\,dx + F_y\,dy = F_y\,dy = dy$

et $\int_{BA} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_0^1 dy = 1$

On en tire :

$W_b = \int_{OB} \vec{F}.\vec{dl} + \int_{BA} \vec{F}.\vec{dl} = 2J$ d'où $W_b \neq W_a$.

Le travail dépend du chemin suivi.

Puissance. — Nous avons jusqu'ici exprimé le travail d'une force sans nous préoccuper du temps mis pour parcourir la trajectoire; c'est l'aspect spatial du travail. Dans de nombreux cas, c'est l'aspect temporel du travail qui importe (par exemple pour connaître la consommation d'énergie d'un moteur ou d'une installation électrique); on utilise alors la *puissance* ou travail par unité de temps (exprimée en joules/seconde - $J.s^{-1}$ ou watts - W). On définit donc la puissance P par :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

☐ **Théorème de l'énergie cinétique.**

Travail élémentaire d'une force

Pour le déplacement (vectoriel) $\vec{dl}$ on a : $dW = \vec{F} \cdot \vec{dl}$

Or $\vec{F} = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ ($\vec{F}$ représente la somme de *toutes les forces* appliquées au point) et $\vec{dl} = \vec{v}\,dt$ (puisque $\vec{dl} = d\vec{OM}$ si O est un point fixe); on a donc :

$$dW = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt \qquad (1)$$

ou $$dW = m\,d\vec{v} \cdot \vec{v} \qquad (2)$$

Le deuxième membre de (2) représente la différentielle de $\frac{1}{2}m\vec{v}.\vec{v}$ (le produit scalaire se différencie comme le produit de deux fonctions); d'où :

$$dW = d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}.\vec{v}\right) = d\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right)$$

Ce résultat constitue la *forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique*; on appelle *énergie cinétique* du point la quantité $\frac{1}{2}m\,v^2$ et on a donc : le travail élémentaire des forces appliquées à un point matériel est égal à sa variation d'énergie cinétique. Autrement dit, le travail des forces appliquées

à un point se traduit par une variation de son énergie cinétique; si le travail est moteur, l'énergie cinétique augmente, si le travail est résistant, elle diminue.
L'équation (1) permet d'écrire ceci sous une autre forme :

$$\frac{dW}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right)$$

soit : la puissance des forces appliquées à un point matériel est égale à la dérivée (par rapport au temps) de l'énergie cinétique de ce point.

Remarque : il s'agit de toutes les forces appliquées au point, y compris celles de frottement ou de contact.

Le théorème de l'énergie cinétique
En calculant le travail des forces quand le point passe de A à B, on obtient :

$$W_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \left[\frac{1}{2}m\,v^2\right]_A^B$$

soit

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \frac{1}{2}m\,v_B^2 - \frac{1}{2}m\,v_A^2$$

où v_A et v_B désignent les modules du vecteur vitesse en A et en B.

Exercice. — *Quelle vitesse initiale verticale doit-on donner à un projectile de masse m pour que celui-ci puisse échapper à l'attraction terrestre ?*

Choisissons un axe vertical ascendant Oz dont l'origine O est à la surface de la Terre. Si R désigne le rayon terrestre, à l'altitude z, le projectile subit la force $F = -\dfrac{G\,M\,m}{(R+z)^2}$ (en projection sur Oz); G est la constante de gravitation, M la masse de la Terre et R + z la distance au centre de la Terre.
Pour appliquer le théorème de l'énergie cinétique, utilisons le point de départ ($z = 0$, $v = v_0$) et un point infiniment éloigné ($z \to \infty$, $v = v_\infty$). La condition pour que le projectile échappe à l'attraction terrestre est que v_∞ soit positive ou nulle (sinon cela voudrait dire que le projectile retombe sur Terre). On a :

$$\frac{1}{2}m\,v_\infty^2 - \frac{1}{2}m\,v_0^2 = \int_0^\infty \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_0^\infty F\,dz$$

où $\int_0^\infty F\,dz = \int_0^\infty -\dfrac{G\,M\,m}{(R+z)^2}\,dz = \left[\dfrac{G\,M\,m}{R+z}\right]_0^\infty = -\dfrac{G\,M\,m}{R}$

d'où : $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_\infty^2 + \frac{G M m}{R}$

soit $v_0^2 = v_\infty^2 + \frac{2 G m}{R}$

Remarques :
* la vitesse initiale à communiquer ne dépend pas de m.
* la vitesse initiale minimum répondant à la question est obtenue pour $v_\infty = 0$ soit

$$v_L^2 = \frac{2 G m}{R}$$

* on peut exprimer simplement v_L en notant qu'à la surface terrestre ($z = 0$) on a :

$$|F| = \frac{G M m}{R^2} = m g \quad \text{(g accélération de la pesanteur)}$$

d'où $v_L^2 = 2 g R$

et $v_L = \sqrt{2 g R} = 1{,}12.10^4$ m/s = 11,2 km/s

Pour des raisons évidentes, on appelle v_L la vitesse de libération.

☐ **Energie mécanique.**

Forces dérivant d'un potentiel
Pour de nombreuses forces, le travail en passant d'un point à un autre ne dépend pas de la trajectoire suivie. Une telle force *dérive d'un potentiel*; c'est le cas de forces courantes comme la pesanteur, la force électrostatique ou celle d'un ressort.
Si dans un repère cartésien, la force $\vec{F}$ a pour coordonnées F_x, F_y et F_z (ce sont des fonctions de x, y et z), on définit le **potentiel V** par

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Remarques :

* le potentiel est une fonction de x, y et z : $V = V(x,y,z)$.
* le potentiel est défini à une constante additive près : si $V_1 = V + k$ on a aussi $F_x = -\frac{\partial V_1}{\partial x}$ etc; V_1 est un potentiel tout aussi convenable que V.

On note symboliquement la relation entre force et potentiel de la façon suivante :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

où $\overrightarrow{\text{grad}}$ représente l'opérateur **gradient**; un gradient désigne la variation d'une grandeur sur une distance unité (on parle souvent d'un gradient de température ou d'un gradient de pression).

Exercice. — *Déterminer le potentiel*
a) pour un ressort,
b) pour la pesanteur :
b_1 - si les variations d'altitude sont faibles,
b_2 - dans le cas général,
c) pour la force électrostatique.

a) si x représente la position de l'extrémité mobile du ressort par rapport à la position d'équilibre ($x > 0$ pour un allongement, $x < 0$ pour une compression) on a :

$$F = -kx = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{dV}{dx} \qquad \text{(V dépend que de x)}$$

d'où $V = \frac{1}{2}kx^2 + \text{Constante}$

La constante d'intégration est arbitraire; elle peut être choisie nulle par commodité, mais cela n'a rien d'obligatoire.

b) b_1 - dans ce cas la pesanteur peut être considérée comme constante; si z désigne l'altitude (choix d'un axe Oz vertical ascendant) la force a une seule composante non nulle :

$$F_z = -mg = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{dV}{dz} \quad \text{(V ne dépend que de z)}$$

d'où $V = mgz + \text{Constante}$

b_2 - avec les mêmes notations qu'à l'exercice précédent on a :

$$F_z = -\frac{GMm}{(R+z)^2} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{dV}{dz}$$

d'où $$V = -\frac{GMm}{R+z} + \text{Constante}$$

ou $$V = -\frac{mgR^2}{R+z} + \text{Constante}$$

c) avec une charge q en O fixe et q' en M on a :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u} \text{ et } \vec{F} = k\frac{qq'}{r^2}\vec{u}$$

En travaillant sur l'axe $(O,\vec{u})$ on a :

$$F = k\frac{qq'}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} \qquad \text{(V ne dépend que de r)}$$

d'où $$V = k\frac{qq'}{r} + \text{Constante}$$

Remarque : dans les quatre cas, on choisit souvent la constante nulle, par commodité.

Potentiel - Travail

Lors d'un déplacement $\vec{dl}(dx,dy,dz)$ le travail d'une force $\vec{F}(F_x,F_y,F_z)$ s'écrit :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel on obtient :

$$dW = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{dV}{\partial z}dz$$

soit $$dW = -dV$$

Pour un déplacement de $A(x_A,y_A,z_A)$ à $B(x_B,y_B,z_B)$:

$$W_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{\widehat{AB}} -dV = [-V]_A^B$$

$$W_{AB} = V(x_A,y_A,z_A) - V(x_B,y_B,z_B)$$

ou, en abrégé :

$$\boxed{W_{AB} = V_A - V_B}$$

Remarques :

* le fait que V soit défini à une constante près n'intervient pas; en faisant la différence des valeurs de V en A et en B, la constante est éliminée. On ne mesure jamais la valeur absolue du potentiel; seules sont physiquement accessibles les différences de potentiel.

* le potentiel représente en quelque sorte de l'énergie mise en «réserve»; c'est pourquoi on parle souvent *d'énergie potentielle*. Le travail de la force mesure alors la variation de cette énergie «emmagasinée», c'est-à-dire la différence entre l'énergie potentielle au départ et celle à l'arrivée.

Notion d'énergie mécanique

Exprimons le théorème de l'énergie cinétique quand la force dérive d'un potentiel :

$$\frac{1}{2}m\,v_B^2 - \frac{1}{2}m\,v_A^2 = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot \vec{dl} = W_{AB} = V_A - V_B$$

sous une autre forme :

$$\boxed{V_A + \frac{1}{2}m\,v_A^2 = V_B + \frac{1}{2}m\,v_B^2}$$

La quantité $V + \frac{1}{2}m\,v^2$ reste donc constante au cours du mouvement; on

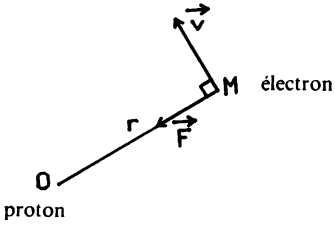
appelle **énergie mécanique totale** la somme de l'énergie potentielle E_p et de l'énergie cinétique E_c. Quand *toutes* les forces dérivent d'un potentiel, on peut définir une énergie potentielle (c'est la somme de tous les potentiels) et on a *conservation de l'énergie mécanique* $E_p + E_c$; le système est dit *conservatif.*

Remarque : il arrive souvent qu'un point soit soumis à plusieurs forces, les unes dérivant d'un potentiel, les autres non; c'est par exemple le cas d'un point pesant subissant une force de frottement (résistance de l'air). On ne peut pas définir ici l'énergie mécanique totale; on peut à la rigueur parler d'une énergie mécanique en ne faisant intervenir que les forces dérivant d'un potentiel, mais alors il n'y a pas conservation de l'énergie mécanique; le système est *non-conservatif.*

On ne peut donc écrire l'équation de conservation de l'énergie mécanique que pour un système conservatif; le théorème de l'énergie cinétique est par contre applicable dans tous les cas.

Exercice. — Energie d'ionisation de l'hydrogène.
Un atome d'hydrogène est formé d'un proton et d'un électron dont on ne considère que l'interaction électrostatique. Le mouvement de l'électron autour du proton est circulaire uniforme et on connaît son moment cinétique $\sigma = \frac{h}{2\pi}$ *(h est la constante de Planck et vaut* $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ *J.s*$^{-1}$*). La masse de l'électron est* $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *kg et la valeur absolue des charges du proton et de l'électron vaut* $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *C.*
1) Calculer le rayon r de l'orbite de l'électron.
2) Déterminer l'énergie cinétique E_c *de l'électron.*
3) Combien vaut son énergie potentielle E_p *? (On pose* $E_p = 0$ *à l'infini).*
4) Quelle énergie doit-on fournir à l'électron pour qu'il échappe à l'attraction du proton ?
5) En déduire l'énergie d'ionisation d'un atome-gramme d'hydrogène ($6{,}10^{23}$ *atomes). L'exprimer en calories.*

1) A un instant donné le système apparaît ainsi :



On a deux relations :

$$\vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \text{ d'où } \sigma = r\,m\,v = \frac{h}{2\pi} \quad (1)$$

$$\vec{F} = \vec{m\gamma} \text{ d'où } k\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad (2)$$

avec $k = 9.10^9$ et compte tenu du mouvement circulaire uniforme. En éliminant v entre les équations (1) et (2) on obtient :

$$r = \frac{h^2}{4\pi^2\, m\, k\, e} = 5{,}3.10^{-11}\ m = 0{,}53\ \text{Å}.$$

2) De l'équation (2) on tire :

$$E_c = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}k\frac{e^2}{r} = 2{,}2.10^{-18}\ J$$

3) Le potentiel pour la force électrostatique vaut (voir précédemment) $k\frac{qq'}{r}$ + Constante. Ici $q = e$, $q' = -e$ et la constante est nulle puisqu'on a choisi de poser $E_p = 0$ à l'infini. On a donc :

$$E_p(r) = -k\frac{e^2}{r} = -4{,}4.10^{-18}\ J.$$

4) Pour que l'électron puisse échapper à l'attraction du proton, il faut lui appliquer une force qui lui permette de s'éloigner indéfiniment; le travail W_f de cette force se calcule au moyen du théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}m\,v_\infty^2 - \frac{1}{2}m\,v^2 = E_p(r) - E_p(\infty) + W_f$$

Le travail minimum nécessaire est obtenu pour $v_\infty = 0$, d'où, puisque $E_p(\infty) = 0$:

$$W_f = -\frac{1}{2}m\,v^2 - E_p(r)$$

$$W_f = -\text{(Energie mécanique totale sur l'orbite)}$$

ou, numériquement :

$$W_f = 2{,}2.10^{-18}\ J$$

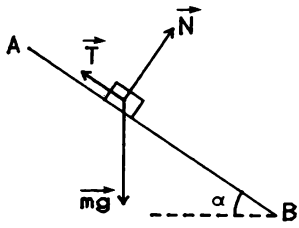
Remarquons que ceci représente la variation d'énergie mécanique totale entre l'électron sur orbite et l'électron à l'infini avec une vitesse nulle ($E_p + E_c$ est nul dans ce cas).

5) L'énergie d'ionisation d'un atome-gramme d'hydrogène est N (nombre d'Avogadro) fois W_f soit :

$$W_I = N \times W_f = 1{,}3 \times 10^6\ J = 3{,}2 \times 10^5 \text{ calories}$$

soit $W_I = 320$ kcal.

Exercice. — *Un objet lâché sans vitesse initiale glisse le long d'un plan incliné à 45° par rapport à l'horizontale, ayant 5 m de long; il subit un frottement solide de coefficient f. Sa vitesse en bas du plan est de 4 m.s^{-1}. Calculer f.*



Les forces appliquées sont :

- le poids $m\vec{g}$
- la réaction du plan, de composante $\vec{T}$ et $\vec{N}$.

On a $T = f\,N$ et $N = mg \cos \alpha$ ($\vec{N}$ équilibre juste la composante normale au plan du poids).
Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = mg\,AB \sin \alpha + W_T$$

puisque $\vec{N}$ a un travail nul lors du mouvement.
W_T est un travail résistant et $v_A = 0$, d'où

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mg\,AB \sin \alpha - f\,mg \cos \alpha\,AB$$

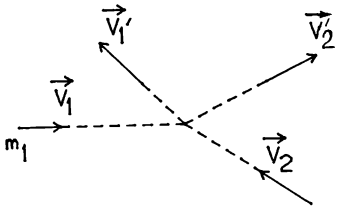
On en tire : $$f = \operatorname{tg} \alpha - \frac{v_B^2}{2g\,AB \cos \alpha} = 0{,}77.$$

CHOCS ET COLLISIONS

Quand une boule de billard en heurte une autre il y a contact entre ces deux objets : on appelle *choc* une telle interaction. Lorsque deux protons sont lancés l'un contre l'autre il se passe quelque chose d'analogue au heurt de boules de billard mais il n'y a pas contact entre les protons : on a une *collision*. On pourra cependant négliger cette distinction dans la mesure où les mêmes équations pourront être écrites dans les deux cas; on usera du seul terme de choc par la suite.

CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Lors d'un choc, il y a des variations brusques de vitesse; ceci implique que les accélérations provoquées par les forces d'interaction sont très grandes et que ces dernières possèdent une très forte intensité, beaucoup plus importante que celle des forces permanentes appliquées telles la pesanteur.
Pendant la durée du choc, on pourra négliger toutes les forces autres que celles d'interaction.
Considérons le choc de deux objets, de masses m_1 et m_2 :



et désignons par $\vec{v}_1(t)$ et $\vec{v}_2(t)$ leurs vitesses respectives ($\vec{v}_1 = \vec{V}_1, \vec{v}_2 = \vec{V}_2$ avant le choc et $\vec{v}_1 = \vec{V}_1', \vec{v}_2 = \vec{V}_2'$ après le choc). Au cours du choc l'objet 1 subit la force d'interaction $\vec{F}_1$ et l'objet 2 la force $\vec{F}_2$; comme pour toutes les interactions, on admet le principe d'action et réaction, à savoir que ces deux forces sont d'intensités égales mais sont opposées; le principe fondamental donne, pour chaque objet :

$$\vec{F}_1 = m_1 \vec{\gamma}_1 = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt}$$

$$\vec{F}_2 = m_2 \vec{\gamma} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

d'où, puisque $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

ou

$$\frac{d\vec{v}_1}{m_1 dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$$

d'où $\boxed{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{un vecteur constant}}$

Lors du choc, la quantité de mouvement du sytème est conservée.

Remarques :
* à elle seule, l'équation traduisant la conservation de la quantité de mouvement ne permet pas de déterminer les vitesses après le choc si on connaît celles avant le choc. Dans l'exemple ci-dessus on a :

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}'_1 + m_2 \vec{V}'_2$$

et, pour calculer $\vec{V}'_2$ par exemple, il faudrait que $\vec{V}'_1$ soit connu.

* le résultat obtenu se généralise au cas d'un système de n objets s'entrechoquant : la quantité de mouvement $\sum_{i=1}^{n} m_i v_i$ de l'ensemble du système reste constante.

CHOCS ELASTIQUES OU INELASTIQUES

Lors du choc de deux objets, leurs vitesses varient et, en conséquence, leur énergie cinétique aussi; pendant le choc, seules comptent les forces de contact et l'application du théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2}m_1 (V'^2_1 - V^2_1) + \frac{1}{2}m_2 (V'^2_2 - V^2_2) = \text{Travail des forces de contact}$$

Un cas idéal est celui où le travail des forces de contact est nul : cela se produit quand l'énergie utilisée pour déformer les objets dans la première phase du choc (compression) est entièrement récupérée dans la deuxième; on a alors un **choc élastique**. On a donc :

Lors d'un choc élastique, l'énergie cinétique totale du système est conservée.

Lorsque les forces de contact ont un travail non nul - c'est évidemment le cas le plus général - le choc est dit **inélastique** et il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique; l'énergie correspondante se retrouve essentiellement sous forme de chaleur dissipée et sert aussi à provoquer des déformations permanentes.

Exercice : choc élastique de deux particules de même masse.

Une particule de masse m percute avec la vitesse $\vec{v}_0$ une particule de même masse, au repos. Le choc est élastique et on appelle $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vitesses respectives des particules incidente et heurtée après celui-ci.
1) Quelles équations peut-on écrire ?

2) Que peut-on en déduire en ce qui concerne $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$?

1) Il y a conservation de la quantité de mouvement :

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

ou
$$\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \qquad (1)$$

Le choc étant élastique, il y a conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}_2^2$$

ou
$$\vec{v}_0^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 \qquad (2)$$

2) De l'équation (1) on tire :

$$\vec{v}_0^2 = \vec{v}_0 . \vec{v}_0 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 + 2\vec{v}_1.\vec{v}_2.$$

d'où, en comparant à (2) :

$$2\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = 0$$

On a donc une alternative :

$$* \vec{v}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_0$$

$$* \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

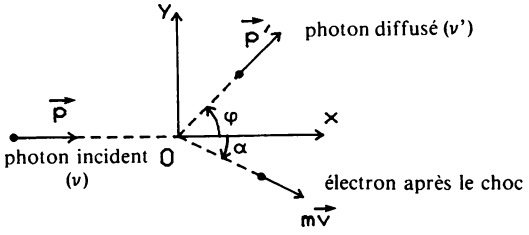
La troisième possibilité ($\vec{v}_2 = \vec{o}$) est inacceptable car on aurait $\vec{v}_1 = \vec{v}_0$ ce qui voudrait dire que la particule incidente serait passée à travers l'autre.

En conclusion : soit la particule incidente s'arrête et la seconde part avec la même vitesse, soit les deux particules ont des trajectoires orthogonales.

L'EFFET COMPTON

Compton découvrit, en 1923, qu'un faisceau de rayons X est en partie diffusé en traversant une cible contenant de nombreux électrons libres et que, de plus, les rayons diffusés ont une fréquence plus faible.

Ce phénomène s'explique aisément, qualitativement et quantitativement, si on admet qu'il résulte de chocs entre des «grains de lumière», des photons, et des électrons; il faut pour cela que chaque photon possède une énergie (analogue à l'énergie cinétique) $E = h\nu$ et une quantité de mouvement $p = \frac{h\nu}{c}$, où h est la constante de Planck, ν la fréquence et c la vitesse de lumière dans le vide.



Il y a conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p} = \vec{p}' + m\vec{v} \qquad (1)$$

Si le choc est élastique, l'énergie cinétique est conservée :

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2} m v^2 \qquad (2)$$

En projection sur Ox et Oy, (1) donne :

$$\begin{cases} p = p' \cos\varphi + m v \cos\alpha \\ 0 = p' \sin\varphi + m v \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m v \cos\alpha = p - p' \cos\varphi \\ m v \sin\alpha = -p' \sin\varphi \end{cases}$$

En élevant au carré et en additionnant membre à membre :

$$m^2 v^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\varphi \qquad (3)$$

Il reste à éliminer $m^2 v^2$ entre (2) et (3) pour obtenir :

$$\nu - \nu' = \frac{h}{2mc^2} (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos\varphi) \qquad (4)$$

On constate expérimentalement que $\nu - \nu'$ est toujours petit; on peut donc faire les approximations $\nu^2 \simeq \nu\nu'$ et $\nu'^2 \simeq \nu\nu'$ d'où

$$\nu - \nu' = \frac{h\nu\nu'}{m c^2} (1 - \cos\varphi) \simeq \frac{h\nu^2}{m c^2} (1 - \cos\varphi) \quad (5)$$

L'équation (5) est parfaitement vérifiée par l'expérience ce qui confirme la validité du modèle proposé.

Exprimée en termes de longueurs d'ondes ($\lambda = \frac{c}{\nu}$), l'équation (5) prend une forme plus simple :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m c} (1 - \cos\varphi)$$

Le terme $\frac{h}{m c}$ est homogène à une longueur d'onde; c'est la *longueur d'onde de Compton* dont la valeur numérique est 0,024 Å. Ceci explique pourquoi il faut utiliser des rayons X ($\lambda \simeq 1$ Å) pour déceler la variation de longueur d'onde.

Exercice : un choc mou. Le pendule balistique

Un choc est mou lorsque les deux objets se solidarisent sous son effet. C'est bien sûr, un choc parfaitement inélastique...

Supposons qu'on tire une balle et qu'elle vienne s'encastrer dans un bloc suspendu à une corde. La masse de la balle est m, celle du bloc M et la vitesse de la balle v_0.

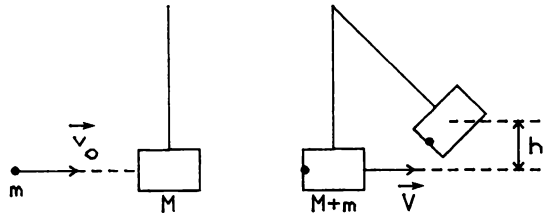
1) Quelles équations décrivent ce choc ?

2) De combien le bloc s'élèvera-t-il dans le mouvement pendulaire qui en résulte ?

3) On a m = 1 g et M = 1 kg.

La hauteur maximale atteinte par le bloc est de 5 cm. Calculer v_0.

4) Quelle énergie a été transformée en chaleur lors du choc ?



avant le choc après le choc

1) Il y a seulement conservation de la quantité de mouvement :

$$m\,v_0 = (M+m)V \qquad (1)$$

2) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant suivant immédiatement le choc et celui où le bloc atteint son altitude maximale (sa vitesse y est nulle); la seule force travaillant est le poids (du moins si la corde est inextensible !) :

$$0 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 = -(M+m)gh \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{V^2}{2g}$$

soit, compte-tenu de (1) : $$h = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g} \qquad (2)$$

3) De l'équation (2) on tire : $$v_0 = \frac{M+m}{m}\sqrt{2g\,h} = 991 \text{ m/s.}$$

4) Lors du choc, il y a une diminution de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}m\,v_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}m\,v_0^2\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \frac{1}{2}m\,v_0^2\,\frac{M}{M+m}$$

soit environ 490 joules.

C'est cette énergie qui a été transformée en chaleur.

STATIQUE

EQUILIBRE D'UN POINT MATERIEL

Par définition, un point matériel a une position d'équilibre si, mis à cette position avec une vitesse nulle, il y reste au repos. Cette définition s'étend sans difficulté à l'équilibre d'un ensemble de points : chaque point de l'ensemble doit être à l'équilibre sous l'action de toutes les forces qui lui sont appliquées (y compris les forces de liaison ou de contact).

☐ **Conditions d'équilibre. Stabilité.** — De façon générale, un point matériel pourra être à l'équilibre si la somme de toutes les forces qui lui sont appliquées est nulle.
On a une position d'équilibre **stable** si la force qui s'exerce sur le point quand on le déplace légèrement tend à le ramener à la position d'équilibre; si tel n'est pas le cas, ne fût-ce que pour un déplacement particulier, l'équilibre est **instable**. On distingue aussi l'équilibre **indifférent** quand il existe une zone d'équilibre; on n'a pas alors un équilibre stable au sens défini ci-dessus.

☐ **Force dérivant d'un potentiel.** — L'étude d'un équilibre est simplifiée si les forces dérivent d'un potentiel; si un point M(x,y,z) subit une force $\vec{F}(F_x,F_y,F_z)$ dérivant du potentiel V(x,y,z) on a la condition d'équilibre

$$\vec{F} = \vec{0}$$

soit $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$; $F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$; $F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

Il y a équilibre si V possède un extremum.
De plus l'équilibre est stable si le potentiel est minimum et instable s'il est maximum.

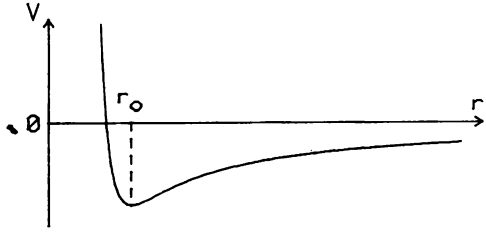
Exercice. — *Pour représenter l'interaction entre deux particules chargées O et M on admet que la force exercée par l'une, O, sur l'autre, M, est de la forme* $\vec{F} = k\left(\frac{r_0^7}{r^7} - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\vec{u}$ *où k et* r_0 *sont des constantes positives et* $\vec{OM} = \vec{ru}$.

Montrer qu'il existe une position d'équilibre. Est-elle stable ?

$\vec{F}$ dérive du potentiel $V = k\left(\frac{r_0^7}{6r^6} - \frac{r_0^2}{r}\right)$; la constante d'intégration est nulle si on convient que V = 0 à l'infini.

A l'équilibre on a $\vec{F} = \vec{0}$ soit $r = r_0$.

Traçons V(r) :



Le potentiel est minimum pour $r = r_0$; l'équilibre est donc stable.

□ **Point matériel lié. Contacts sans frottement.** — On appelle réaction la force de contact exercée par une surface ou une courbe sur un point assujetti à s'y déplacer.
Quand la liaison est sans frottement, la réaction est orthogonale à la surface ou à la courbe.
La condition d'équilibre d'un point matériel se déplaçant sans frottement sur une surface et subissant d'autre part une force $\vec{F}$ est donc :

$$\vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$$

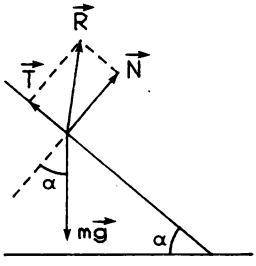
où $\vec{R}$ désigne la réaction de la surface.
Comme $\vec{R}$ est orthogonal à la surface, la condition d'équilibre devient : *$\vec{F}$ doit être orthogonale à la surface.*

Ceci est, bien sûr, valable aussi pour un point se déplaçant sans frottement sur une courbe.

□ **Contact avec frottement.** — La réaction, exercée par une surface sur laquelle un point matériel est assujetti à se déplacer, n'est pas orthogonale à la surface si le contact se fait avec frottement; elle comporte une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$. Le point reste en équilibre si $T = ||\vec{T}||$ n'est pas trop grand par rapport à $N = ||\vec{N}||$:

la condition d'équilibre d'un point matériel sur une surface est $T \leqslant f N$,
où f désigne le *coefficient de frottement*.

Exercice. — *Le contact d'un point pesant avec un plan est caractérisé par le coefficient de frottement f. De combien peut-on incliner ce plan sur l'horizontale sans que le point cesse d'être en équilibre ?*



Le point est en équilibre sous l'action de son poids et de la réaction $\vec{R}$ du plan (composantes $\vec{T}$ et $\vec{N}$). En projection sur la normale au plan et

sur le plan on a :

$$N = mg \cos \alpha \qquad \text{et} \qquad T = mg \sin \alpha$$

et la condition d'équilibre s'écrit :

$$T \leqslant f N \qquad \text{soit} \qquad mg \sin \alpha \leqslant f\, mg \cos \alpha$$

d'où $\sin \alpha \leqslant f \cos \alpha$ ou $\operatorname{tg} \alpha \leqslant f$

Il faut que α soit inférieur à l'angle α_0 tel que $\operatorname{tg} \alpha_0 = f$; on appelle parfois α_0 l'angle de frottement : le point est en équilibre si la réaction du plan se trouve dans le cône d'axe normal au plan et de demi-angle au sommet α_0 (on le désigne sous le nom de *cône de frottement*)

EQUILIBRE DU SOLIDE

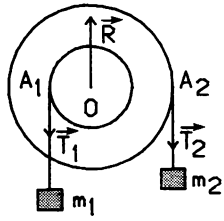
☐ **Caractéristiques d'un solide.** — Par définition, un solide est un ensemble de points matériels dont les distances restent constantes.
La position d'un solide est caractérisée par 6 paramètres contre 3 pour un point; ce peut être, par exemple, les 3 coordonnées d'un point du solide et 3 angles donnant son orientation.
Un point joue un rôle particulièrement important, le centre de gravité (ou centre des masses) : un champ de forces tel celui de la pesanteur exerce sur un solide une action équivalente à une force unique appliquée au centre de gravité.
Si un solide est formé des points M_1, M_2, ..., M_n de masses respectives m_1, m_2, ..., m_n, son centre de gravité est défini par :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} .$$

☐ **Conditions d'équilibre.** — Elles sont au nombre de deux :
1) la résultante des forces appliquées au solide doit être nulle
2) la somme des moments des forces appliquées, par rapport à un point quelconque, doit être nulle.
Ce sont là deux équations vectorielles qui, dans l'espace, conduisent à 6 équations; elles suffisent donc en principe pour déterminer les positions d'équilibre.
Pour un mouvement de translation , c'est-à-dire lorsque les points du solide sont tous animés de la même vitesse (quand il se déplace...), la première condition est suffisante; quand seule une rotation est possible, on n'utilise que la deuxième condition.

Exercice. — *Une poulie double est formée de deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 (R_1 = 10 cm, R_2 = 20 cm) solidaires. Une masse m_1 est suspendue à une corde enroulée sur le cylindre de rayon R_1 et une masse m_2 à une corde enroulée sur l'autre cylindre.*
1) Quelle masse m_2 doit-on utiliser pour équilibrer la masse m_1 = 100 kg ?
2) Quelle est la force exercée par le support de la poulie ?

1) Le solide dont on étudie l'équilibre est la poulie; il subit les forces suivantes :
* tensions des câbles appliquées en A_1 et A_2,
* action $\vec{R}$ du support appliquée en O.
Si on néglige le poids des cordes, leur tension est égale au poids des masses qui y sont suspendues.



Dans cette question, pour éliminer $\vec{R}$ on peut écrire que le moment résultant *par rapport à O* est nul (puisque $\vec{R}$ passe par O) :

$$\vec{OA_1} \wedge \vec{T}_1 + \vec{OA_2} \wedge \vec{T}_2 = \vec{0}$$

soit, dans ce cas :

$$m_1 g\, R_1 - m_2 g\, R_2 = 0$$

d'où $$m_2 = m_1 \frac{R_1}{R_2} = 50 \text{ kg}$$

2) La résultante des forces appliquées est nulle :

$$\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

d'où $$R = T_1 + T_2 = m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) g$$

soit $$R = 150 \times 9{,}8 = 1470 \text{ N}$$

DYNAMIQUE DU SOLIDE

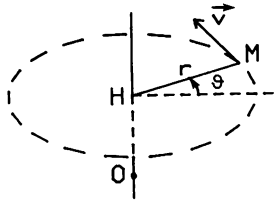
MOUVEMENTS DE TRANSLATION

Pour un mouvement de translation, le mouvement du solide est défini par celui de son centre de gravité; on applique le principe fondamental de la dynamique au centre de gravité subissant la résultante des forces appliquées au solide.

Remarque : il est toujours possible d'étudier séparément le mouvement du centre de gravité et celui autour de ce dernier.

CAS PARTICULIER IMPORTANT : ROTATION AUTOUR D'UN AXE

□ **Relation fondamentale.** — Considérons un point M, de masse m, animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe Δ; sa distance r à Δ reste donc constante et on repère sa position par l'angle Θ entre $\overrightarrow{HM}$ et une direction fixe.



Si O est un point fixe de Δ, le moment cinétique par rapport à O est $\vec{J} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ et sa projection J_Δ sur Δ vaut HM × m v; comme HM = r

et $v = r\dfrac{d\Theta}{dt}$ on obtient : $J_\Delta = m\,r^2\dfrac{d\Theta}{dt}$ (1)

Le moment par rapport à O des forces appliquées $\vec{F}$ est $\vec{S} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ et sa projection S_Δ sur Δ représente *le moment de* $\vec{F}$ par rapport à Δ.

D'après le theorème du moment cinétique on a :

$$\vec{S} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

d'où $S_\Delta = \dfrac{dJ_\Delta}{dt} = m\,r^2\dfrac{d^2\Theta}{dt^2}$ (r est constant) (2)

Si maintenant on a un solide formé de n points (masse m_i, distance r_i à Δ, $i = 1, 2, \ldots n$) on peut sommer les n relations (2), soit, en appelant S_Δ la somme des moments par rapport à Δ des forces appliquées *au solide* :

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i r_i^2 \frac{d^2\Theta}{dt^2}\right)$$

Comme $\frac{d\Theta}{dt}$ est le même pour tous les points :

$$S_\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right) \frac{d^2\Theta}{dt^2}$$

La quantité $I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ est appelée *moment d'inertie* du solide par rapport à Δ.

On a donc un équivalent du principe fondamental de la dynamique pour les solides en rotation :

$$\boxed{S_\Delta = I_\Delta \cdot \frac{d^2\Theta}{dt^2}}$$

☐ **Principaux moments d'inertie.** — Nous nous limiterons à des solides possédant un axe de symétrie; ce sont d'ailleurs les cas les plus importants en pratique.

Cylindre plein de rayon R, par rapport à son axe : $\frac{1}{2} M R^2$

Cylindre creux de rayon R, par rapport à son axe : $M R^2$ (si l'épaisseur est négligeable).

Sphère pleine, de rayon R, par rapport à un diamètre : $\frac{2}{5} M R^2$

Sphère creuse, de rayon R, par rapport à un diamètre : $\frac{2}{3} M R^2$

Barre de longueur l, par rapport à un axe orthogonal passant par son extrémité : $\frac{1}{3} M l^2$

Barre par rapport à un axe passant par son milieu : $\frac{1}{12} M l^2$

☐ **Autres relations importantes.** — On peut aussi calculer l'énergie cinétique d'un solide en rotation; en posant $\omega = \frac{d\Theta}{dt}$ on a :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2}$$

Le travail des forces appliquées lors d'une rotation d'angle $d\Theta$ vaut :

$$dW = S_\Delta \, d\Theta = S_\Delta \frac{d\Theta}{dt} dt = S_\Delta \, \omega \, dt$$

On définit ainsi la *puissance instantanée :*

$$P = \frac{dW}{dt} = S_\Delta \, \omega$$

On obtient une expression du théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} I_\Delta \, \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_\Delta \, \omega_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} P \, dt = \int_{t_1}^{t_2} S_\Delta \, \omega \, dt = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} S_\Delta \, d\Theta$$

La dynamique du solide en rotation conduit donc à des relations tout à fait analogues à celles de la dynamique du point.

Remarquons enfin que pour un ensemble de solides *isolé* (ceux-ci ne subissent que des forces d'interaction - contacts entre eux par exemple) on a *conservation du moment cinétique*; c'est un résultat analogue à la conservation de la quantité de mouvement rencontrée dans la théorie des chocs.

Exercice. — *Un pendule de torsion est formé d'une barre de longueur l et de masse m suspendue à un câble exerçant un couple de rappel proportionnel à l'écart angulaire avec la position d'équilibre (– CΘ).*
1) En appelant I_1 le moment d'inertie de la barre par rapport à un axe orthogonal passant par son centre, quelle est la pulsation ω_1 du mouvement sinusoïdal obtenu ?
2) Même question pour le pendule obtenu en ajoutant une masse m à chaque extrémité de la barre (pulsation ω_2).

3) Combien vaut le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$?

1) On a $- C\Theta = I_1 \frac{d^2\Theta}{dt}$ soit $\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{C}{I_1}\Theta = 0$

Cette équation admet des solutions sinusoïdales de pulsation

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C}{I_1}}$$

2) Si I_2 est le moment d'inertie du solide (barre + masses) on a

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{C}{I_2}\Theta = 0 \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{C}{I_2}}$$

3) $I_1 = \frac{1}{12} m \, l^2$ $\qquad I_2 = I_1 + 2\, m(\frac{l}{2})^2 = \frac{7\, m\, l^2}{12}$

D'où $\qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \sqrt{\frac{1}{7}} = 0{,}38$

MECANIQUE DES FLUIDES

STATIQUE

☐ **Relation fondamentale.** — Les principales grandeurs mécaniques mesurables au sein d'un fluide en équilibre sont :

- sa *masse volumique* $\rho = \frac{dM}{dV}$ (masse rapportée à son volume), exprimée en kg.m^{-3} (SI) ou en g.cm^{-3} (1 g.cm^{-3} = 10^3 kg.m^{-3});

- sa *pression* $p = \frac{dF}{dS}$ (force exercée sur la surface dS, perpendiculairement à elle), exprimée en pascals - Pa (1 Pa = 1 N m^{-2}); la pression en un point est indépendante de l'orientation de la surface dS.

Une autre grandeur importante est la température, mais son étude est du ressort de la thermodynamique (voir le chapitre correspondant).

L'écriture de la condition d'équilibre d'un élément de volume dx dy dz situé au point de coordonnées (x,y,z) (axe Oz vertical ascendant) conduit aux relations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z$$

où X, Y et Z sont les coordonnées de la force extérieure appliquée par *unité de masse*.

On en tire la variation de pression dp lors d'un déplacement (dx, dy, dz) :

$$dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Un cas particulier important est celui d'un fluide *incompressible* (ρ = constante) qui est soumis à la seule force de pesanteur; on a alors X = Y = 0 et Z = − g d'où :

$$dp = -\rho\, g\, dz$$

ce qui conduit à l'équation fondamentale de l'hydrostatique (bien qu'elle s'applique à d'autres fluides que l'eau) :

$$\boxed{p - p' = \rho\, g\, h}$$

où p désigne la pression à une cote z donnée et p' celle celle à la cote z + h.

☐ **Poussée d'Archimède.** — Un récipient hermétique imperméable, de volume V, rempli d'un liquide de masse volumique ρ est en équilibre quand il est plongé dans ce liquide (si du moins la masse du récipient est négligeable); quelles forces subit-il ?

- le poids du liquide (dirigé vers le bas) : ρ V g
- la résultante des forces de pression exercées par le liquide extérieur sur les parois : $\vec{F}_p$ qui est dirigée vers le haut.

Ces deux forces sont donc exactement opposées et on peut énoncer :

La résultante des forces de pression exercées par un fluide incompressible (poussée d'Archimède) de masse volumique ρ sur un corps de volume V est verticale, dirigée vers le haut et d'intensité ρ g V, le poids du volume de fluide déplacé.

Exercice. — *Comparer le poids d'une goutte d'eau et la poussée d'Archimède qu'elle subit dans l'air (masse volumique de l'air dans les conditions normales 1,3 kg.m^{-3}).*

Poids de la goutte : ρ_{eau} g V = P
Poussée d'Archimède : ρ_{air} g V = F
d'où le rapport cherché :

$$\frac{P}{F} = \frac{\rho_{eau}}{\rho_{air}} = \frac{10^3}{1,3} = 770$$

La poussée d'Archimède est ici pratiquement négligeable.

DYNAMIQUE

☐ **Formule de Bernoulli.** — Nous ne nous intéressons ici qu'aux fluides incompressibles en mouvement irrotationnel (c'est-à-dire essentiellement aux écoulements et non aux mouvements stationnaires). La masse volumique ρ du fluide reste donc constante. Un petit volume de fluide qui se déplace à la vitesse v est soumis à deux forces, la pesanteur (accélération ou force par unité de masse g) et la résultante des forces de pression exercées par le fluide environnant; en écrivant la conservation de l'énergie mécanique totale de ce petit volume on obtient la formule de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\, g\, z = \text{Constante}$$

p est la **pression statique** absolue c'est-à-dire la pression atmosphérique (10^5 pascals = 1 bar) plus la pression par rapport à l'atmosphère; il arrive fréquemment qu'on ne mentionne que cette dernière. Le terme $\frac{1}{2}\rho\, v^2$, homogène à une pression, résulte de la vitesse de l'écoulement; c'est la **pression dynamique**. La somme de la pression statique et de la pression dynamique $p + \frac{1}{2}\rho\, v^2$ est la **pression totale**. Le terme ρ g z est une pression résultant du potentiel de pesanteur (z représente l'altitude, ou cote, de l'élément de fluide considéré).
La validité de la formule de Bernoulli comporte les mêmes limites que le théorème de la conservation de l'énergie mécanique : dès lors qu'une force dissipative (frottement - voir plus loin la notion de viscosité; appareil récepteur absorbant de l'énergie - turbine par exemple) intervient, la somme précitée diminue : on a des **pertes de charge** qui ne sont rien d'autre qu'une diminution de la pression totale.

Remarquons enfin que le type d'écoulement étudié ici interdit qu'il y ait en quelqu'endroit accumulation de fluide (rappelons que le fluide est incompressible); en conséquence, le *débit* est le même partout, c'est-à-dire que le volume de fluide traversant une section de la veine fluide par unité de temps est identique quelle que soit la section utilisée.

□ **Orifice dans une paroi : formule de Torricelli.** — On peut appliquer la formule de Bernoulli au cas d'un fluide s'échappant d'un récipient où il est au repos; si p désigne la pression relative dans le récipient au voisinage du trou (la pression absolue est $p_0 + p$, avec p_0 pression atmosphérique) on a

$$(p_0 + p) + \rho\, g\, z = p_0 + \frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\, g\, z$$

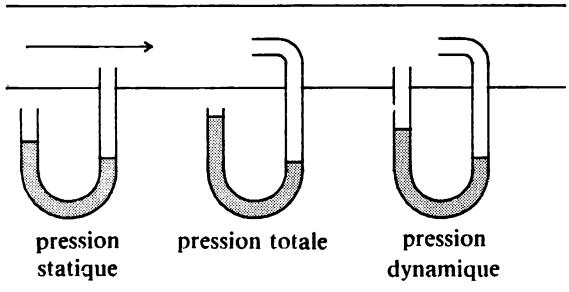
Le premier membre concerne le fluide contenu dans le récipient et le second le fluide qui s'échappe avec la vitesse v; la cote z est évidemment la même. On en tire la formule de Torricelli :

$$\boxed{v = \sqrt{2\frac{p}{\rho}} = \sqrt{2\, g\, H}}$$

où H représente la hauteur de fluide au-dessus du trou ($p = \rho\, g\, H$ en appliquant l'équation fondamentale de l'hydrostatique, qui, remarquons le, n'est qu'un cas particulier de la formule de Bernoulli).

Remarque : pour être correcte, il faut que la formule de Torricelli soit appliquée à un orifice dans une *paroi mince* afin qu'on puisse négliger les pertes de charge lors de sa traversée.

□ **Mesure des pressions : manomètres.** — Tous les manomètres mesurent la force due à la pression exercée sur une surface donnée. Il faut pour cela introduire un tube dans la veine fluide; selon la disposition de l'orifice du tube on mesure la pression statique (orifice ouvert parallèlement au courant) ou la pression dynamique (orifice ouvert perpendiculairement au courant, vers l'amont).
Un manomètre simple est le *tube de Pitot*, partiellement rempli d'un liquide, dont une extrémité communique avec l'atmosphère et l'autre avec la veine fluide :



Avec un tube de Pitot on ne mesure que les pressions relatives :
(1) mesure de la pression statique
(2) mesure de la pression totale
(3) mesure directe de la pression dynamique.
Des mesures de pression statique et de pression dynamique on peut déduire la vitesse v de l'écoulement, et, si on connaît la section S de la conduite, le débit $Q = v\,S$ (en $m^3.s^{-1}$).

□ **Effet d'une diminution de section.** — Un fluide incompressible s'écoule dans une conduite horizontale de section S_1 avec un débit Q sous la pression p_1; la conduite présente un rétrécissement (section $S_2 < S_1$). Calculons la pression statique p_2 au niveau de ce dernier en utilisant la formule de Bernoulli :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, z = p_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, z$$

soit $$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\,(v_1^2 - v_2^2)$$

Le débit Q est le même partout :

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

d'où $$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right]$$

ou, en fonction de Q :

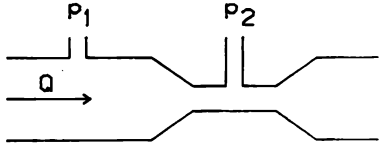
$$\boxed{p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\, Q^2 \left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right)} \qquad (1)$$

L'expression (1) montre que p_2 est inférieur à p_1 : la pression statique est plus faible au niveau du rétrécissement.

Si nous posons $\Delta p = p_2 - p_1$ et $\alpha = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right)$ la relation (1) devient :

$$\boxed{\Delta p = \alpha\, Q^2} \qquad (2)$$

Cette relation est utilisée pour mesurer des débits au moyen d'un *tube de Venturi* :



Le coefficient α de la relation (2) est déterminé expérimentalement; il suffit pour cela de mesurer Δp pour deux valeurs de Q : la relation (2) peut se mettre sous la forme :

$$\log \Delta p = 2 \log Q + \log \alpha$$

ou, en posant $k = \log \alpha$:

$$\boxed{\log \Delta p = 2 \log Q + k} \qquad (3)$$

La relation (3) montre qu'en *coordonnées logarithmiques* la courbe donnant Δp en fonction de Q est une droite que la connaissance de deux points suffit à déterminer.

Remarque : au vu de l'équation (3), on pourrait penser qu'un seul point expérimental suffirait pour déterminer la droite. En réalité, aucun écoulement n'est parfait et il est toujours plus ou moins turbulent; dans ce cas la relation entre Δp et Q n'est plus donnée par la relation (2) mais par

$$\Delta p = \alpha Q^{\beta}$$

où β est un coefficient d'autant plus voisin de 2 que l'écoulement est moins turbulent (pour de faibles débits par exemple). En coordonnées logarithmiques $\Delta p = f(Q)$ est toujours représentée par une droite mais sa pente est β. En pratique, il convient de faire un étalonnage plus complet afin d'obtenir une précision suffisante.

On utilise aussi le phénomène décrit par l'équation (1) pour faire le vide dans une enceinte : c'est le principe de la *trompe à eau*. On pourrait, en théorie, obtenir un vide absolu, c'est-à-dire une pression p_2 nulle, en réduisant suffisamment S_2 : si S_2 est assez petit, on peut négliger $\frac{1}{S_1^2}$ devant $\frac{1}{S_2^2}$ et l'équation (1) devient :

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho \frac{Q^2}{S_2^2}$$

et, pour annuler p_2 il suffit de choisir

$$S_2 = Q\sqrt{\frac{\rho}{2p_1}}$$

Avec de l'eau ayant une pression relative de 1,5 bars (pression absolue 2,5 bars ou $2{,}5.10^5$ pascals), pour un débit Q = 12 litres/mn = 2.10^{-4} $m^3.s^{-1}$ on trouve $S_2 = 9.10^{-6}$ m^2 = 9 mm^2. Dans la réalité, le vide ainsi obtenu est très loin d'être aussi poussé. La validité de l'équation (1) est limitée à des vitesses d'écoulement faibles pour lesquelles les turbulences sont négligeables ainsi que les frottements; en diminuant S_2 tout en maintenant le débit constant on augmente la vitesse et l'équation cesse rapidement d'être vérifiée (si elle l'était, on pourrait obtenir une pression négative, ce qui est, bien sûr, dépourvu de sens physique). On a, de plus, complètement négligé la vaporisation de l'eau : la pression ne peut diminuer que jusqu'à la tension de vapeur de l'eau à la température considérée.

□ **Ecoulements laminaires - Viscosité.** — Sin un écoulement se fait à vitesse faible, les différents filets de fluide glissent les uns contre les autres sans s'entremêler : l'écoulement est **laminaire**. Deux filets adjacents ne sont généralement pas animés de la même vitesse et leur déplacement relatif entraîne l'apparition d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse relative des deux filets.

On définit le coefficient de viscosité ou **viscosité dynamique** μ en écrivant que la force qui s'exerce sur un élément de surface plane S se déplaçant parallèlement à un plan, à la distance l, avec une vitesse v est :

$$F = \mu \frac{Sv}{l}$$

En SI, la viscosité dynamique s'exprime en poiseuilles (Pl).

On utilise aussi la **viscosité cinématique** $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, ρ étant la masse volumique du fluide. Elle s'exprime en $m^2.s^{-1}$ (vérifier son équation aux dimensions).
En utilisant l'expression précédente on peut déterminer la distribution des vitesses dans une conduite cylindrique de rayon r_0; à la distance r de l'axe la vitesse du fluide est :

$$v = \frac{1}{4\mu} \times \frac{\Delta p}{L} (r_0^2 - r^2)$$

où L est la longueur du tube et Δp la différence de pression entre ses extrémités. La distribution des vitesses est parabolique et le maximum de vitesse v_0 se trouve sur l'axe tandis que la vitesse est nulle sur la paroi (liquide adhérent).
On en tire l'expression du débit **(loi de Poiseuille)** :

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\mu L} r_0^4$$

ce qui correspond à une **vitesse moyenne débitante** (vitesse d'un écoulement uniforme ayant le même débit) :

$$v_m = \frac{1}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} r_0^2 = \frac{v_0}{2}$$

La vitesse moyenne débitante est la moitié de celle sur l'axe.
On utilise en particulier la loi de Poiseuille pour déterminer expérimentalement la viscosité dynamique :

$$\mu = \frac{\pi \Delta p \, r_0^4}{8 Q L}$$

Un *viscosimètre* de ce type est particulièrement adapté à la mesure de faibles viscosités (gaz par exemple).

Exercice. Viscosimètre rotatif. — *Un liquide est contenu dans un récipient cylindrique de rayon R tournant autour de son axe à la vitesse angulaire ω constante. On immerge un second cylindre de même axe (rayon $r < R$ et longueur l) dans le liquide; il est alors entraîné par le liquide en rotation et il faut lui appliquer un couple C pour le maintenir immobile. On peut déduire de la mesure de C celle de la viscosité dynamique μ du liquide.*

1) On peut calculer la distribution de vitesse du liquide en utilisant l'expression de la force exercée sur une surface par frottement vue au paragraphe précédent. Pour simplifier, nous admettrons que cette distribution est linéaire. En supposant que le liquide adhère aux parois établir l'expression de la vitesse v(x) à la distance x de l'axe.
2) En déduire la force qui s'exerce sur le cylindre intérieur, puis le couple C.

1) $v(x) = ax + b$

La condition d'adhérence est :

$v(r) = 0 = ar + b$ (cylindre intérieur immobile)

$v(R) = R\omega = aR + b$ (cylindre extérieur en rotation)

d'où

$$v(x) = \frac{R\omega}{R - r}(x - r)$$

2) Au voisinage du cylindre intérieur (distance r + dx de l'axe) le liquide circule à la vitesse dv. La surface latérale (2π rl) du cylindre intérieur subit donc la force :

$$F = \mu \frac{2\pi\, rl\, dv}{dx}$$

De v(x) on tire $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{R\omega}{R - r}$

d'où $$F = \mu \frac{2\pi\, rl\, R\omega}{R - r}$$

et $$C = F \times r = \mu \frac{2\pi\, r^2\, Rl\, \omega}{R - r}$$

De la mesure de C on tire bien

$$\mu = \frac{R - r}{2\pi\, r^2\, Rl\, \omega} C$$

Ce type de viscosimètre est employé essentiellement pour les fortes viscosités.

Exercice. — *Un tuyau d'arrosage de longueur $l = 100$ m et de section $S_1 = 3$ cm² débite 12 litres/seconde.*
1) Quelle doit être la pression p_1 au robinet (pression relative) si l'orifice du tuyau est de 1 cm² ?
2) Même question pour un orifice de 0,1 cm² (pression p_2) ?
3) Tenons maintenant compte de la viscosité μ de l'eau ($\mu = 10^{-3}$ Pl); calculer l'augmentation de pression nécessaire.
Conclusions ?

1) Appelons S_2 la section de l'orifice; la formule de Bernoulli donne :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

où v_1 est la vitesse de l'écoulement dans le tuyau et v_2 celle du jet. En fonction du débit $Q = v_1 S_1 = v_2 S_2$

$$\text{on a } p_1 + \frac{1}{2}\rho \frac{Q^2}{S_1^2} = \frac{1}{2}\rho \frac{Q^2}{S_2^2}$$

$$\text{et } \quad p_1 = \frac{1}{2}\rho\, Q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) \qquad (1)$$

Avec $S_1 = 3\ cm^2$ et $S_2 = 1\ cm^2$ on a $p_1 = 1{,}8.10^3$ Pa

2) On peut utiliser l'expression (1) avec $S_2 = 0{,}1\ cm^2$:

$$p_2 = 2.10^5 \text{ Pa}$$

La pression nécessaire augmente de plus de 100 fois (carré de la diminution de section).

3) Il faut toujours la pression p_1 ou p_2 pour obtenir le débit voulu; mais il s'agit ici de la pression dans le tuyau juste avant l'orifice. La viscosité de l'eau introduit une perte de charge qui sera compensée par une augmentation Δp de la pression au robinet :

$$\Delta p = \frac{8\mu\, Q\, l}{\pi\, r_0^4} = \frac{8\pi\, \mu\, Q\, l}{S_1^2}$$

soit numériquement $\Delta p = 5{,}6.10^3$ Pa.
Pour un orifice de 1 cm², l'essentiel de la pression au robinet sert à compenser les pertes de charge tandis que ces dernières sont pratiquement négligeables dans le second cas.

☐ **Turbulence - Nombre de Reynolds.** — Un écoulement laminaire n'est possible que pour de faibles vitesses; en particulier l'adhérence aux parois est nécessaire sinon on voit apparaître un écoulement désordonné ou *turbulent*. Pour un tube cylindrique, la force de frottement à la paroi est :

$$F = \pi\, r_0^2\, \Delta p = \pi\, r_0^2 \cdot \frac{8\mu\, L\, v_m}{r_0^2} = 8\pi\, \mu\, L\, v_m$$

La force «d'arrachement» à la paroi dépend certainement de la pression dynamique $\frac{1}{2}\rho\, v_m^2$ et de la surface latérale S du cylindre; elle est donc proportionnelle à $\frac{1}{2}\rho\, v_m^2\, S$.

Pour comparer les deux, formons le rapport sans dimension (le vérifier)

$$C = \frac{\frac{1}{2}\rho\, v_m^2\, S}{F} = \frac{\frac{1}{2}\rho\, v_m^2 \cdot 2\pi\, r_0\, L}{8\pi\,\mu\, L\, v_m} = \frac{\rho\, r_0\, v_m}{8\mu}$$

ou, en fonction du diamètre d :

$$C = \frac{\rho\, d\, v_m}{16\mu} = \frac{Re}{16}$$

où $\boxed{Re = \frac{\rho\, d\, v_m}{\mu} = \frac{d\, v_m}{\nu}}$ est le **nombre de Reynolds.**

Le nombre de Reynolds est lié au rapport de la force d'arrachement à la force de frottement : *l'écoulement est donc laminaire si Re est petit et turbulent, si Re est grand.*

Le passage d'un écoulement laminaire à un régime turbulent correspond à une valeur du *nombre de Reynolds critique* Re*; la valeur de Re* est généralement comprise entre 2000 et 3000 (on utilise souvent 2400).
En pratique, même si Re est petit on peut avoir des turbulences, créées par exemple par des irrégularités de la paroi; inversement, on peut réduire les turbulences en faisant passer le fluide à travers des grilles qui obligent les filets fluides à suivre des trajectoires régulières.

☐ **Résistance à l'avancement.** — Un objet de section principale S en mouvement dans un fluide *turbulent* subit une force *proportionnelle au carré de sa vitesse :*

$$\boxed{F = -\, k\, \rho\, S\, v^2}$$

où k est un coefficient qui dépend de la *forme* de l'objet (c'est un nombre sans dimension) et ρ la masse volumique du fluide (supposé incompressible).
Le signe − indique que la force est opposée au déplacement.
Quand la vitesse est faible *(écoulement laminaire)* cette résistance est *proportionnelle à la vitesse*; un cas particulier important est celui d'une sphère de rayon R, se déplaçant à la vitesse v, pour lequel on a

$$\boxed{F = -\, 6\pi\,\mu\, v\, R}$$ **Loi de Stokes**

où μ est la viscosité dynamique du fluide.

☐ **Vitesse de sédimentation - Centrifugation.** — Considérons une particule sphérique de masse volumique ρ, de rayon R (volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, masse $m = \rho\, V$), plongée dans un liquide de masse volumique ρ_0 et de viscosité dynamique μ et soumise à son poids $\rho\, V\, g$; l'équation de son mouvement est

$$\rho\ V\ g\ -\ \rho_0\ V\ g\ -\ 6\pi\ \mu\ R\ v\ =\ \rho\ V \frac{dv}{dt}$$

où v désigne la vitesse de la particule; on a orienté l'axe utilisé vers le bas et le terme $\rho_0\ V\ g$ représente la poussée d'Archimède.
Si on pose $f\ =\ 6\pi\ \mu\ R$, cette équation devient :

$$(\rho - \rho_0)V\ g\ -\ f\ v\ =\ \rho\ V \frac{dv}{dt}$$

Comme nous l'avons vu en dynamique du point, la solution de cette équation conduit à deux termes, l'un représentant le régime transitoire et l'autre le régime permanent. Ce dernier est obtenu lorsque v reste constante : $v\ =\ v_s$

soit $\frac{dv}{dt}\ =\ 0$; on en tire

$$(\rho - \rho_0)V\ g\ -\ f\ v_s\ =\ 0 \qquad \text{d'où} \qquad v_s\ =\ \frac{\rho\ -\ \rho_0}{f} V\ g$$

On remarque que la vitesse de sédimentation v_s est proportionnelle à l'accélération de la pesanteur g. On pose $v_s\ =\ S\ g$ où S est la constante de sédimentation (ou constante de Svedberg) de la particule relativement au fluide considéré :

$$S\ =\ \frac{\rho\ -\ \rho_0}{f} V\ =\ \frac{\rho\ V}{f}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\ =\ \frac{m}{f}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

S est homogène à un temps et s'exprime en unités Svedberg (l'unité Svedberg vaut 10^{-13} s).
Dans le champ de la pesanteur, la vitesse de sédimentation n'est mesurable pour de grosses particules. Dans le cas de macromolécules telles que l'hémoglobine dans le plasma sanguin on doit recourir à la technique de centrifugation; au lieu d'utiliser la pesanteur, on soumet l'échantillon à l'accélération centrifuge γ obtenue en le faisant tourner à la vitesse angulaire ω à une distance l de l'axe :

$$\gamma\ =\ l\ \omega^2 \quad \text{et} \quad v_s\ =\ S\ \gamma.$$

v_s devient ainsi mesurable si γ est suffisamment grand.

La mesure de S permet, en particulier, de déterminer la masse molaire M de macromolécules :

$$S\ =\ \frac{m}{f}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\ =\ \frac{M}{N\ f}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

soit $$M\ =\ \frac{N\ f\ S}{1\ -\ \frac{\rho_0}{\rho}}$$ (N est le nombre d'Avogadro)

le coefficient f pouvant être obtenu par d'autres techniques (diffusion par exemple).

Exercice. — *A chaque pulsation du cœur, le mélange sanguin se trouve homogénéisé. Le phénomène de sédimentation de l'hémoglobine (S = 4,4 unités Svedberg) risque-t-il de rendre le sang inhomogène ?*

Dans le champ de la pesanteur, la vitesse de sédimentation de l'hémoglobine est :

$$v_s = S\,g = 4{,}4.10^{-13} \times 9{,}81 \simeq 4{,}4.10^{-12}\ \text{m/s}.$$

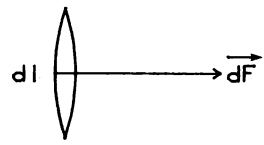
Le rythme cardiaque étant environ d'une pulsation par seconde, la sédimentation ne risque pas de causer de trouble.

CAPILLARITE

□ **Tension superficielle.** — On considère généralement la surface libre d'un liquide comme plane; l'observation d'un simple verre d'eau montre qu'il n'en est rien, du moins près d'une paroi.
Cette déformation de la surface d'un liquide au contact d'un solide (ou d'un autre liquide), un *phénomène capillaire*, a son origine dans les forces d'*interaction moléculaires* qui maintiennent la cohésion du liquide. Ces forces dites de **Van der Waals** sont d'origine électrique et varient en $\frac{1}{r^7}$; elles deviennent rapidement négligeables et, en pratique, leur *rayon d'action* ne dépasse pas 100 Å (1 Å = 10^{-10}m).
La résultante des forces de Van der Waals est nulle sur une molécule située assez loin de la surface (plus de 100 A) puisque les molécules agissantes sont réparties régulièrement tout autour; elle est, par contre, dirigée *vers l'intérieur* du liquide si la molécule est située au voisinage de la surface (il y a plus d'interactions avec les molécules intérieures).
Il en résulte qu'un liquide tend à avoir une surface minimale (sphérique s'il n'est soumis à aucune force). Pour augmenter la surface de dS il faut fournir une énergie dW telle que

$$dW = A\,dS$$

où A est la **constante de tension superficielle** exprimée en *joules par mètre carré* ($J.m^{-2}$).
Du point de vue des dimensions, A est une énergie sur une surface; il revient au même de dire que c'est une force sur une longueur. La force en question est une force de cohésion de la surface : la **tension superficielle.** Supposons que la surface soit «fendue» sur une longueur dl :

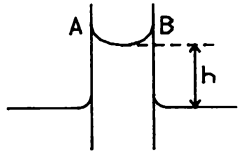


Pour rapprocher les bords de la «coupure» il faut exercer la force

$$dF = A\, dl$$

A s'exprime aussi en *newtons par mètre* ($N.m^{-1}$).

□ **Capillarité. Loi de Jurin.** — Si on plonge le bas d'un *tube capillaire* (diamètre inférieur à 2 ou 3 mm) dans un liquide comme de l'eau, celui-ci monte dans le tube à un niveau plus élevé que celui de la surface libre :



Au contact du tube (le long du cercle de diamètre AB = 2r) s'exerce une force de tension superficielle dirigée vers le haut telle que

$$F = A.2\pi r$$

En négligeant la différence de pression atmosphérique entre les deux niveaux, écrivons que F est équilibré par le poids de la colonne de liquide :

$$F = \rho.\pi r^2 h.g$$

où ρ est la masse volumique du liquide.
On en tire la **loi de Jurin :**

$$h = \frac{2A}{\rho\, g\, r}$$

Remarque 1 : un liquide comme le mercure *descend* dans le tube au lieu d'y monter comme l'eau (tube en verre). On dit que l'eau *mouille le verre*, c'est-à-dire qu'elle tend à s'étaler dessus, tandis que le mercure *n'est pas mouillant*.

Remarque 2 : la tension superficielle dépend fortement de la pureté du liquide : $A = 0{,}075\ J.m^{-2}$ pour l'eau pure, $A = 0{,}030\ J.m^{-2}$ pour l'eau de savon. Cette diminution de la tension superficielle de l'eau quand on y ajoute du savon est à l'origine de l'action de ce dernier : augmentation de la *mouillabilité* des solides par l'eau et donc possibilité de *détacher* des impuretés adhérant à une surface.

□ **Ascension entre des lames verticales. —**

Lames parallèles de longueur l et distantes de e (de l'ordre de 1 mm) :

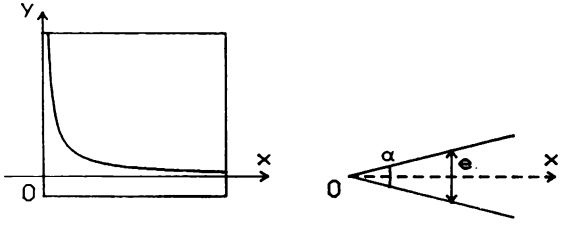
exprimons l'équilibre entre la force due à la tension superficielle, dirigée vers le haut, et le poids du liquide soulevé :

$$2A\,l = \rho\, l\, e\, h\, g$$

$$h = \frac{2A}{\rho\, g\, e}$$

L'ascension est la même que dans un tube de *rayon* e.

Lames formant un dièdre d'angle α



A la distance x de 0, l'écartement des lames est $e = x\alpha$ (α est un angle petit); admettons que l'ascension y est la même qu'entre deux lames parallèles espacées de e :

$$y = \frac{2A}{\rho\, g\, e}$$

soit $$y(x) = \frac{2A}{\rho\, g\, \alpha\, x}$$ *hyperbole équilatère*

TESTS

1. *L'accélération d'un point mobile M est* $\vec{\gamma}(2;\ -e^{-2t};\ 3\cos t)$ *dans le repère cartésien (O x y z). A l'instant* $t = 0$, *M est en O; déterminer sa vitesse* $\vec{v}$ *et sa position* $\overrightarrow{OM}$ *à tout instant.*

2. *Un véhicule de masse m = 1000 kg, roulant à la vitesse v = 36 km/h, s'immobilise sur un mètre lors d'un choc. Quelle force moyenne subit-il ? La comparer avec son poids.*

3. *Un véhicule de fête foraine se déplace sur un rail formant une spire de rayon R dont le plan est vertical.*

   a) Quelle doit être sa vitesse minimale v_1 au sommet de la spire pour qu'il reste en contact avec le rail ?

   b) En déduire la vitesse minimale v_0 qu'il devait posséder au point le plus bas de la spire. Application numérique : R = 5 m.

4. *A quelle altitude doit-on lancer un satellite géostationnaire (une révolution en 24 heures) ?*

5. *La Terre tourne autour du Soleil en 365 jours, suivant une orbite quasi circulaire de 150 millions de kilomètres de rayon. Quelle est la masse du Soleil ? (On rappelle que la constante de gravitation G vaut $6{,}67.10^{-11}\ N.m^{-2}.kg^{-2}$).*

6. *Un point matériel de masse m, attaché à l'extrémité libre d'un ressort de raideur K, évoluant dans un milieu exerçant une force de frottement proportionnelle à la vitesse ($-\vec{fv}$), subit une force sinusoïdale $F_0 \cos\omega t$. Le point se déplace sur l'axe Ox horizontal; O est la position du point quand le ressort est au repos.*

   a) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par x(t).

   b) Trouver une solution de la forme $x = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Exprimer A_0 et φ en fonction de $\Gamma = \frac{f}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

7. *Le fond d'un réservoir d'eau, de section constante S, est percé d'un trou de section $s << S$.*

   a) Trouver l'équation différentielle vérifiée par la hauteur h d'eau dans le réservoir à chaque instant.

   b) La hauteur d'eau initiale est h_0. Combien de temps met le réservoir pour se vider ? Application numérique : $S = 1\ m^2$, $s = 1\ cm^2$, $h_0 = 1\ m$.

8. *Exprimer le nombre de Reynolds en fonction du débit. A partir de quel débit d'eau a-t-on un écoulement turbulent dans un tuyau de 10 cm de diamètre ? On donne $Re^* = 200$ (nombre de Reynolds critique) et $\mu = 10^{-3}$ Pl (viscosité dynamique de l'eau).*

9. *La hauteur d'ascension du benzène dans un tube de diamètre 0,1 mm est 13,6 cm. Calculer la constante de tension superficielle du benzène (masse volumique $9.10^2\ kg.m^{-3}$).*

10. *Les tubes d'une centrifugeuse, tournant à 6000 tours/mn, ont 2 cm de longueur et leur milieu est à 10 cm de l'axe de rotation.*

    a) Quelle est l'accélération moyenne γ dans chaque tube ? La comparer à celle de la pesanteur ($g = 10\ m.s^{-2}$).

    b) La totalité des virus de la mosaïque du tabac sédimente en 270 secondes; quelle est leur constante de sédimentation ? On admettra que l'accélération est la même dans toutes les parties de chaque tube.

THERMODYNAMIQUE

PREMIER PRINCIPE

PRESSION - TEMPERATURE - CHALEUR - TRAVAIL

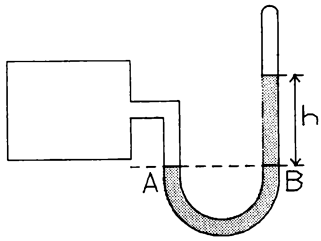
☐ **Notion de pression.** — Lorsqu'un gaz est contenu dans un récipient, les collisions des molécules de gaz avec les parois du récipient impliquent l'apparition d'une force résultante sur chaque élément de surface des parois. Cette force par unité de surface est appelée la pression P du gaz

$$P = \frac{F}{S}$$

P peut être calculée soit à partir de mesures macroscopiques soit à partir de paramètres microscopiques caractérisant les molécules.

Unités de pression : dans le système international, l'unité de pression est le pascal (Pa) ou newton par mètre carré. Son multiple le bar (1 bar = 10^5 Pa) est d'emploi commode car sa valeur est voisine de la pression atmosphèrique habituelle. En chimie, comme les réactions ont lieu le plus souvent sous une pression égale à la pression atmosphérique, on utilise l'unité «atmosphère normale» (atm) qui correspond à la pression équilibrée par une colonne de 760 mm de mercure à 0° C.

1 bar = 10^5 Pa
1 atm = 1,0135 bar = 1,0135.10^5 Pa
760 mm Hg = 1 atm = 760 torrs (1)



Manomètre

☐ **Mesures pratiques des pressions**

- Par la hauteur d'une colonne de liquide

La force de pression est équilibrée à l'aide du poids d'une colonne de liquide. La pression est identique en A et en B (théorème fondamental de la statique des fluides). La pression à mesurer est en A, celle de B est la force exercée par unité de surface par le poids du liquide de masse volumique ρ, de hauteur h au-dessus de B et de section s. Si g est l'accélération de la pesanteur, le poids du liquide au-dessus de B est ρ.s.h.g. et la pression mesurée $\frac{\rho\ s\ h\ g}{s} = \rho\ h\ g$

Ce principe est utilisé, par exemple, pour mesurer la pression atmosphérique à l'aide du tube de Torricelli. Dans les conditions normales, la hauteur h du mercure dans le tube au-dessus de la surface libre dans la cuve où plonge le tube est de 0,760 m ou 760 mm Hg.

En fait, les manomètres mesurent pratiquement une différence de pression (manomètre différentiel). Ce serait le cas dans le dispositif précédent si le tube au lieu d'être fermé était ouvert et donc relié à la pression atmosphérique. Dans ce cas, la pression en A serait :

$$P = P_0 + \rho\ g\ h$$

(P_0 : pression atmosphérique au moment de la mesure).

(1) Le torr est une unité tolérée.

Si l'on néglige le mouvement du sang en le considérant comme un fluide en équilibre, les formules s'appliquent comme pour un gaz. Ainsi ce que l'on appelle la pression ou tension artérielle est la surpression par rapport à la pression atmosphérique. Pour un corps horizontal, elle est en moyenne de 100 mm Hg; s'il est debout, elle n'est pas la même dans la tête ou dans les pieds. La mesure doit donc se faire au niveau du cœur.

Calcul de la pression d'un gaz (point de vue microphysique)
Un calcul grossier peut être le suivant :
- la quantité de mouvement communiquée à la paroi par une collision est $2\,m\bar{v}$ (où $\bar{v}$ est la vitesse moyenne);
- le nombre de collisions par unité de temps et par unité de surface serait nv si les n molécules se dirigeaient toutes vers la paroi; comme il y a 6 directions possibles dont une seule est dirigée vers la paroi, on prendra $\frac{1}{6}$ nv

d'où $$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{3} n\, m\bar{v}^2}$$

(La formule rigoureuse est $P = \frac{1}{3} n\, mc^2$ où c est la vitesse quadratique moyenne).
P est d'autant plus grand que n et v sont grands.

L'énergie cinétique moyenne εc d'une molécule étant $\varepsilon c = \frac{1}{2} m\, v^2$, on a également $$\boxed{\bar{P} = \frac{2}{3} n\, \varepsilon c}$$

remarquons que ces relations ne font pas intervenir la nature des molécules, mais uniquement leur masse.

□ **Notion de température.** — La température traduit numériquement (et de façon fidèle) l'impression de chaud et de froid que nous ressentons. L'échelle thermodynamique dite échelle Kelvin des gaz parfaits est une grandeur mesurable. La température Kelvin (ou température absolue) est une fonction linéaire du produit PV d'un gaz parfait. De plus, on fixe à 273,16 la valeur de la température au point triple de l'eau. L'équation caractéristique du gaz parfait PV = n RT permet de calculer la valeur en kelvins (K) de la température à partir des mesures de P et V. Dans le système international (SI) $R = 8{,}314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.
En pratique, on utilise la température Celsius, dont l'unité, le degré Celsius (°C) est par convention égale au kelvin (1° C = 1 K) a pour origine (0° C) la température de la glace fondante sous la pression atmosphérique (273,15 K). La relation de correspondance entre ces deux températures est donc :

$$\boxed{T = 273{,}15 + \Theta}$$ (T = température Kelvin, Θ = température Celsius).

Pour mesurer une température, on utilise un *thermomètre* qui indique sa propre température. Par exemple, si l'on prend la température du corps humain

et qu'on lit 37° C, en fait c'est le thermomètre qui est à 37° C et on suppose l'équilibre avec le corps humain. Cette expérience repose sur un principe :
deux corps en contact thermique à l'équilibre ont même température.
Par contact thermique, on entend toute possibilité d'échanger de la chaleur (conduction, convection et rayonnement). Au bout d'un certain temps, la température des deux corps en présence étant identique on parle alors d'équilibre thermique.
Ainsi, si le thermomètre n'est pas en contact suffisamment longtemps avec le patient, l'indication du thermomètre n'a rien à voir avec la température du patient.

Aspect microphysique de la température :
Nous venons de voir que la pression d'un gaz $P = \frac{2}{3} n \varepsilon c$ est proportionnelle à l'énergie cinétique de la masse de gaz.

Pour une mole $PV = RT = \frac{2}{3} Ec$. L'énergie cinétique molaire Ec est donc proportionnelle à la température Kelvin

$$Ec = \frac{3}{2} RT$$

La température est une grandeur qui prend en compte l'agitation incessante, désordonnée et plus ou moins intense des molécules à l'état microscopique.

☐ **Equation caractéristique**

Variables d'état d'un système.
Système : On appelle système la portion d'espace (et son contenu) limitée par une surface réelle ou fictive, où se situe la matière étudiée. Le reste de l'univers est appelé «milieu extérieur» et n'est considéré qu'en fonction des échanges qu'il peut avoir avec le système considéré.

Un *système* est dit *ouvert* lorsqu'il peut échanger de la matière et de l'énergie avec le milieu extérieur.
Un *système* est dit *fermé* lorsqu'il peut seulement échanger de l'énergie avec le milieu extérieur.
Un *système* est dit *isolé* s'il échange ni énergie, ni matière avec le milieu extérieur.

Etat d'un système :
Connaître l'état d'un système, c'est fixer la valeur du nombre minimum de grandeurs, permettant de reconstituer, sans ambiguïté, le système avec un ensemble de propriétés parfaitement définies.
Ainsi, le système suivant est parfaitement défini : 1 mole d'oxygène à 273 K dans un volume de 22,4 litres. Ces grandeurs, prises en nombre minimum, sont dites *variables d'état.*
Toutes les autres grandeurs du système sont déterminées par ses variables d'état. Ainsi, la pression du gaz définie précédemment est une *fonction d'état* car elle est fonction du nombre de moles, de la température et du volume.
Un gaz est décrit par 3 yariables d'état. Entre les 4 variables les plus couramment utilisées P. V. T, n (nombre de moles) existe donc une relation d'état

appelée *équation caractéristique*

$$\boxed{PV = n\,RT}$$

(R : constante du gaz parfait, R = 8,314 $J.K^{-1}.mol^{-1}$, R = 1,987 $cal.K^{-1}.mol^{-1}$).
Cette relation ne peut être appliquée que si le gaz se comporte suivant le modèle gaz parfait. C'est-à-dire qu'il suit rigoureusement la loi de Mariotte; le produit P.V ne dépend que de la température et est proportionnel au nombre n de moles : P.V = n f(T).

Remarque : L'application correcte de cette équation implique essentiellement son utilisation dans des unités cohérentes en fonction de la valeur de R prise en compte. Ainsi, en SI, la pression est en pascals, le volume en m^3, la température étant toujours exprimée en kelvins.
Rappelons également que pour ramener les fonctions d'un gaz dans des conditions données, il est utile d'appliquer directement la relation déduite de l'équation caractéristique :

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0V_0}{T_0}$$

Exercices.
1) Calculer R en $atm.l.K^{-1}.mol^{-1}$.

Une mole de gaz occupe un volume de 22,4 l dans les conditions normales (0° C, P = 1 atm)

$$PV = RT$$

$$R = \frac{PV}{T} = \frac{1.22,4}{273} = 0,082\ atm.l.K^{-1}.mol^{-1}$$

2) Quel volume occupent 1,5 moles d'O_2 à 298 K sous une pression de 750 mmHg.

$$V = \frac{n\,RT}{P} = \frac{1,5.0,082.298.760}{750} = 37,14\ \text{litres}$$

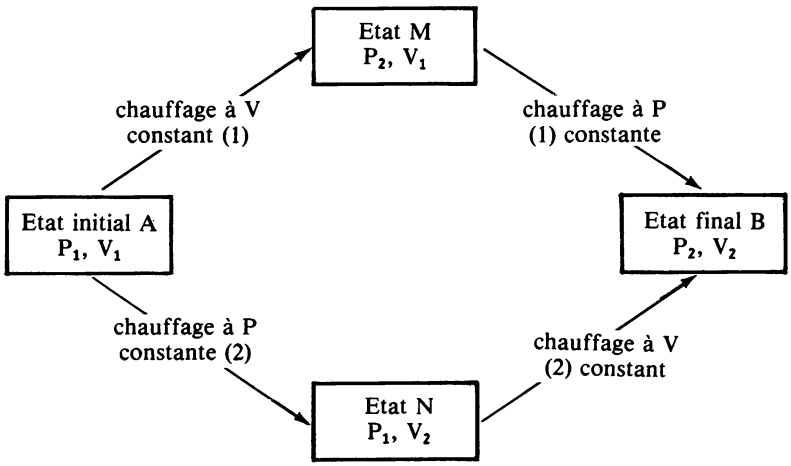
Il existe d'autres équations caractéristiques pour les gaz qui rendent compte des propriétés des gaz réels. C'est, par exemple, le cas de l'*équation de Van der Waals* qui à partir du modèle du gaz parfait tient compte du volume des molécules et de l'attraction des molécules entre elles. (Le gaz parfait suppose les molécules totalement indépendantes.)

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = n\,RT.$$

La correction $\frac{n^2a}{V^2}$, dite de pression interne, revient à envisager une pression réelle, plus faible que celle calculée dans le cas du gaz parfait; cette diminution est due à l'existence des forces à distance entre les molécules du gaz.

La correction – nb, dite de covolume, tient compte du volume propre occupé par les molécules.
Les valeurs a et b sont données dans les tables de constantes pour toutes les espèces. Elles sont calculées à partir des données microphysiques.
Il existe de même une équation caractéristique liant n, P, V.T pour les solides et les liquides. Mais, en pratique, les variations relatives de volume des corps sous ces états sont très faibles par rapport à celles des gaz.
On néglige donc l'influence des variations de pression sur les solides ou les liquides et on considère que leur volume est invariable.
En conséquence, **l'état des solides et des liquides ne dépend que d'une seule variable d'état physique : la température.**

□ **Propriétés des fonctions.** — Une grandeur est une fonction d'état lorsque sa valeur est parfaitement déterminée par la connaissance des valeurs numériques attribuées aux variables d'état qui la définissent. Cette définition implique ce que l'on appelle le «*principe de l'état initial et de l'état final*».
Quand un système subit une transformation d'un état initial à un état final, la variation de la fonction d'état ne dépend que de ces états définis par les variables d'état, et non de la manière dont on passe de l'un à l'autre, c'est-à-dire des étapes intermédiaires.
Par exemple, le passage d'une mole de gaz parfait de l'état P_1V_1 à P_2V_2 peut se faire suivant 2 *transformations équivalentes 1* et *2* (mêmes états initial et final).
On peut en donner la représentation schématique suivante :



La variation de la fonction d'état T dans ce cas est la même pour ces 2 transformations équivalentes :

$$\Delta T = \frac{1}{R}(P_2V_2 - P_1V_1)$$

Pour des raisons pratiques, on considère souvent des *transformations cycliques* : l'état final est identique à l'état initial après une évolution qui peut être complexe. Dans ce cas la variation de la fonction est nulle.
En conclusion, si F est une fonction d'état :
- $\Delta F = \Delta F_1 = \Delta F_2$ pour une transformation 1 équivalente à une transformation 2
- $\Delta F = 0$ pour toute transformation cyclique.

□ **Propriétés des grandeurs extensives.** — Une grandeur est *extensive*, lorsque, par juxtaposition de 2 systèmes semblables, on obtient un système résultant dont la grandeur présente une valeur double de chacune des valeurs initiales. Le volume, le nombre de moles, la longueur, la masse... sont des grandeurs extensives.
Une grandeur est *intensive* lorsque sa valeur ne varie pas lorsqu'on juxtapose 2 systèmes semblables. La pression, la température, la fréquence d'un son... sont des grandeurs intensives.

La notion de bilan est une notion courante. La thermodynamique a ainsi pour principal intérêt pratique de conduire à des bilans d'énergie. Le bilan d'une grandeur extensive d'un système comporte 2 termes : un terme d'échange avec l'extérieur et un terme de source dû à une création à l'intérieur du système. Ainsi, si l'on considère une étable comportant au début de l'hiver 30 vaches et 10 veaux, à la fin de l'hiver on peut y trouver 32 vaches et 12 veaux car :
- le paysan aura vendu à la boucherie 2 vieilles vaches et acheté 3 autres : c'est l'échange avec le milieu extérieur,
- une vache est morte et 2 veaux sont tués : c'est la création à l'intérieur du système.
Par la suite, pour toute fonction d'état F, grandeur extensive (seul le bilan des grandeurs extensives a une signification physique), la variation ΔF de cette fonction pourra se mettre éventuellement sous la forme :

$$\Delta F = \Delta eF + \Delta \varphi$$

terme d'échange avec le milieu extérieur — terme de source

Le terme de source $\Delta\varphi$ est souvent nul. Dans ce cas, la grandeur extensive dont on a fait le bilan est *conservative*.

Pour reconnaître qu'une grandeur est conservative, il suffit d'étudier son comportement. Au cours d'un cycle : si $\Delta eF = 0$, $\Delta\varphi = 0$ car $\Delta F = 0$, la grandeur est donc conservative.

□ **Energie.** — Les sources d'énergie sont bien connues : ce sont les substances (charbon, pétrole, corps radioactifs...) ou les phénomènes (vents, marées, chutes d'eau, rayonnement solaire...) qui permettent d'obtenir du travail mécanique ou de la chaleur.
Le mot énergie est souvent plus ou moins bien utilisé du point de vue scientifique. Expérimentalement, on ne mesure jamais l'énergie d'un système mais seulement les échanges d'énergie avec un autre système ou le milieu extérieur. Ces échanges d'énergie sont toujours de deux formes :

- échange de chaleur ΔQ (mesuré par calorimètre)
- échange de travail ΔW.

Un système possède de l'énergie s'il est susceptible d'en échanger sous une ou sous ces 2 formes avec le milieu extérieur. L'énergie d'un système n'a pas de valeur absolue puisqu'on ne mesure que des variations lors des échanges.
Remarquons que seule l'équation d'Einstein $E = mC^2$, dans le cas des systèmes isolés, donne une valeur absolue à l'énergie, mais elle est inutilisable en chimie et biochimie car les variations habituelles d'énergie sont trop faibles pour être calculées par mesure de m (ou Δm).

Dans le langage courant, on distingue souvent différentes formes d'énergie (nucléaire, électrique, géothermique, solaire, chimique...) ce qui est très discutable du point de vue scientifique car on ne peut pas isoler ou séparer les différentes formes d'énergie dans un système. Il y a un contenu potentiel global d'énergie à partir duquel on peut récupérer du travail, de la chaleur, ou les deux sous formes d'échanges.
L'énergie cinétique doit être considérée à part. Elle ne dépend que de la masse et la vitesse et non des autres variables d'état décrivant le système. Sa valeur est absolue tout en dépendant d'un référentiel.
L'énergie potentielle est aussi indépendante du reste du système mais seul $\Delta(mgh)$ a une signification physique; h a donc une origine arbitraire.
La notion *d'énergie électrique* n'a, le plus souvent, pas de sens. Ainsi le travail de nature électrique qu'un condensateur avec diélectrique est susceptible de fournir dépend de la nature de la transformation qui sera soit adiabatique (1) soit isotherme par exemple. En général, il s'agit du travail des forces électriques en conditions isothermes.
L'énergie calorifique n'existe pas car un système donne ou reçoit de la chaleur aux dépens de l'énergie que nous définirons par la suite. Ainsi, un gaz peut être refroidi soit par perte de chaleur soit par prélèvement de travail.
L'énergie rayonnante est soit une forme d'échange de chaleur (émission thermique du soleil par exemple) soit une forme d'échange de travail (émission monochromatique d'un gaz excité par exemple).
Aucun échange d'énergie n'est chimique. Lors d'une réaction chimique, du travail électrique ou du travail des forces de pression et de la chaleur sont échangés et ces quantités échangées dépendent de la nature de la transformation.
En conclusion, l'apport essentiel du premier principe sera d'affirmer qu'il n'existe pas de formes indépendantes d'énergie dans un système.

(1) adiabatique : sans échange de chaleur.

□ **Chaleur.** — La notion de chaleur fait partie de notre vie courante. Mais attention, il faut la dissocier de la notion de température. En effet, si souvent un apport de chaleur se traduit par une augmentation de la température, la température reste constante lorsqu'un corps subit un changement d'état.
Expérimentalement la *calorimétrie* permet de mesurer des quantités de chaleur. En chimie, par exemple, on utilise le calorimètre adiabatique de Berthelot qui n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur.
On met en contact un corps (ou un ensemble de corps) avec l'eau du calorimètre et l'ensemble du calorimètre dont on détermine initialement la valeur en eau ou masse en eau (Me = masse d'eau qui prélèverait la même quantité de chaleur dans les mêmes conditions). Le principe de la calorimètrie et qu'à l'équilibre thermique, la chaleur gagnée par l'un a été cédée par l'autre et réciproquement. La chaleur cédée est mesurée en notant la température de l'eau du calorimètre avant la mise en contact et après l'équilibre thermique.
Il existe différents dispositifs calorimétriques. Ainsi, en microcalorimètrie, on arrive à déceler des échanges de chaleur se traduisant par des très petites variations de température (10^{-5} à 10^{-6} °C).
L'unité de quantité de chaleur est le joule mais on utilise encore souvent la calorie (cal) qui, en pratique, représente la quantité de chaleur qui élève de 1°C la température de 1 g d'eau (en réalité entre 14,5° et 15,5°C)

$$\boxed{1 \text{ calorie} = 4{,}1840 \text{ joules}}$$

Capacité calorifique
Lorqu'une quantité de chaleur ne sert qu'à augmenter la température de ce corps pur qui reste donc dans sa phase initiale, elle peut permettre de déterminer la capacité calorifique $\mathscr{C}$ de ce corps par :

$$\boxed{\mathscr{C} = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad \text{ou} \quad \mathscr{C} = \frac{\delta Q}{dt} \qquad \Delta Q = \mathscr{C}\Delta T}$$

La capacité calorifique est généralement exprimée pour une mole de matière et l'on parle alors de *capacité calorifique molaire* C($J.K^{-1}.mol^{-1}$ ou $cal.K^{-1}.mol^{-1}$)

$$\boxed{\Delta Q = nC\Delta T}$$

Si la quantité de matière est le gramme, il s'agit de la *chaleur spécifique* c ($J.K^{-1}.g^{-1}$ ou $cal.K^{-1}.g^{-1}$)

$$\boxed{\Delta Q = mc\Delta T}$$

La capacité calorifique d'un corps pur varie avec la température. On utilise soit la valeur moyenne définie dans des intervalles de température soit des relations définies expérimentalement :

$$C = \alpha + \beta T + \gamma T^2 \quad \text{par exemple}$$

Les constantes α, β et γ se trouvent dans les tables. En l'absence de renseignements, on la considère comme constante.

Pour les solides et les liquides, il n'y a qu'une valeur de la capacité calorifique à une température donnée.
Par contre, pour les gaz on définit les *capacités à volume constant* ou les *capacités à pression constante* suivant la nature de la transformation qui a conduit à l'apport de chaleur.

Chaleur latente
Un apport de chaleur à un corps pur peut ne pas élever la température, il peut provoquer un changement d'état. On définit suivant les cas une :
- chaleur latente de fusion (Lf)
- chaleur latente de vaporisation (Lv)
- chaleur latente de sublimation (Ls).

Notons également que les transformations allotropiques (Carbone diamant en Carbone graphite par exemple) s'accompagnent également d'échange de chaleur sans élévation de température.
Remarquons que lors d'un bilan calorifique, il ne faut pas oublier de comptabiliser ces transformations. Dans le cas des mélanges, on détermine une capacité calorifique du mélange en tenant compte de la participation relative de chacun des corps purs en établissant ainsi des capacités calorifiques partielles.

Exercice. — *Quelle sera la température finale de l'eau d'un calorimètre si l'on ajoute 100 g de glace à − 20° C aux 2000 g d'eau à 22° C présents initialement dans le calorimètre ?*
(Masse en eau du calorimètre = 120 g; Lf(H_2O) = 1440 cal.mol^{-1}; C glace = 9 cal.K^{-1}.mol^{-1})

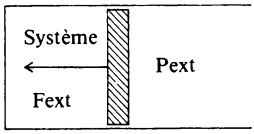
Il faut faire le bilan total (c_{H_2O} = 1 cal.K^{-1}.g^{-1})
Chaleur perdue par le calorimètre : 2120 (22 − Θ)
Chaleur gagnée par les 100 g de glace supposée transformée en eau :

$$\frac{100}{18}.9.20 + \frac{1440.100}{18} + 100\,\Theta$$

$$2120\,(22-\Theta) = 9000 + 100\,\Theta \quad ; \quad \Theta \simeq 17°\ \text{C}.$$

□ **Travail.** — Le *travail reçu* (en valeur algébrique) par un système est le travail des *forces extérieures* appliquées au système. Le travail est par définition le produit scalaire du vecteur force et du vecteur déplacement ($\delta W = \vec{F}.\vec{dl}$). Le travail des forces intérieures n'est pas pris en compte car il ne s'agit pas d'un échange.
Tout apport au système de travail ou de chaleur sera compté positivement; par contre, si le système perd du travail ou de la chaleur, la quantité échangée sera comptée négativement.

En chimie ou biochimie, le travail pris le plus souvent en compte, en dehors du travail des forces électriques est le travail des forces de pression extérieure. Considérant un gaz enfermé dans un cylindre horizontal et fermé par un piston de surface S coulissant librement et soit Pext la pression extérieure.



Une force Fext agit sur le piston et le travail de cette force lorsque le piston se déplace d'une distance Δl est : $|\Delta W| = Pext\ S\ \Delta l$ avec $S\Delta l = \Delta V$ (variation de volume du système).

Si le vecteur $\overrightarrow{\Delta l}$ est dirigé vers l'extérieur, ΔV est positif (augmentation de volume du système) mais ΔW est négatif ($\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{\Delta l}$ de sens contraire).

Si $\overrightarrow{\Delta l}$ est dirigé vers l'intérieur, ΔV est négatif et ΔW est positif. Ces 2 cas sont donnés par la formule :

$$\Delta W = - Pext\ \Delta V$$

Même en l'absence d'une paroi matérielle, on peut considérer que le fluide est limité par une membrane fictive confondue avec la surface de séparation du système et du milieu extérieur.

Exercice. — *De l'eau liquide bout, sachant qu'à 100° C le volume spécifique de la vapeur est de 1,671 $l.g^{-1}$ sous pression normale, quel est le travail reçu par une mole d'eau lorsqu'elle se vaporise sous la pression atmosphérique normale ?*

$$\Delta W = - Pext\ \Delta V = - 1{,}0135.10^5.18.(1671 - 1).10^{-6}$$
$$= - 3042\ J$$

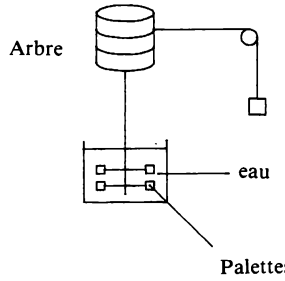
L'ébullition d'une mole d'eau à l'air libre s'accompagne d'un travail de $- 3042\ J.mol^{-1}$ du système eau qui doit repousser l'atmosphère extérieure.

Toute réaction chimique à pression constante entraînant une variation du nombre de moles des espèces gazeuses (produits - réactifs) implique dans son bilan énergétique au travail des forces de pression extérieure.
Le travail des forces électriques (piles ou cellules à électrolyse) se met sous la forme E.dq où E est la différence de potentiel appliquée de l'extérieur, et dq la quantité d'électricité qui circule dans le circuit.

ENERGIE INTERNE - ENTHALPIE

□ **Enoncé du premier principe.** — Un principe est une assertion qui n'est contredite par aucun fait expérimental.
De nombreuses grandeurs extensives sont conservatives : charges électriques, la masse en chimie (loi de Lavoisier).... En est-il de même de la chaleur et du travail ?

Expérience de Joule



Des poids de masse M permettent de faire tourner un arbre sur lequel sont calées des palettes placées dans une cuve remplie d'eau. En descendant d'une hauteur h les poids entraînent une élévation de la température de l'eau de $\Delta\Theta°$ C. Il y a donc échauffement de l'eau sans apport d'une quantité de chaleur du milieu extérieur. Le système eau pourrait être ramené aux conditions initiales en évacuant la chaleur au profit d'un calorimètre par exemple. Au total, il s'agit donc bien d'une transformation cyclique et la quantité de chaleur échangée est $\simeq 0$. La chaleur n'est pas une grandeur extensive conservative. Il en est de même dans cette expérience pour le travail. Pour cette raison, nous notons un échange infinitésimal de chaleur δQ et de travail δW et non dQ et dW car il ne s'agit pas de la variation d'une fonction.
Mais si dans l'expérience de Joule, on considère le bilan total des échanges de chaleur et de travail, on trouve expérimentalement que lors d'un cycle l'ensemble travail + chaleur est nul. Comme chaleur et travail sont 2 aspects d'une même entité physique que l'on appelle énergie et qui sont évalués avec la même unité : le joule, on peut donc dire que l'énergie dans l'expérience de Joule est une grandeur extensive conservative. Cette constatation expérimentale a conduit au premier principe.

1er principe : Pour tout système fermé, il existe une fonction d'état, grandeur conservative appelée énergie interne (représentée par le symbole U) dont les variations sont égales à la somme du travail et de la chaleur reçus du milieu extérieur.

En termes de bilan, la variation d'énergie interne se caractérise par un terme de somme toujours nul, par un terme d'échange égal à la somme $\Delta Q + \Delta W$ qui se confond avec la variation de la fonction

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

L'énergie interne est une fonction d'état, c'est-à-dire qu'il est toujours possible d'appliquer le «principe de l'état initial et final».
Remarquons que la chaleur ou le travail peut se comporter comme une fonction d'état et s'identifier à une grandeur conservative si et seulement si :

$$\Delta W = 0 : \Delta Q = \Delta U$$
$$\Delta Q = 0 : \Delta W = \Delta U$$

Transformation des gaz parfaits

- *A volume constant*, lorsque n moles de gaz passent de T_1, P_1, V à T_2, P_2, V par simple chauffage :

$\Delta Q = n\,Cv(T_2 - T_1)$; $\Delta W = -\,Pext\,\Delta V = 0$ $(\Delta V = 0)$

$\Delta U = n\,Cv(T_2 - T_2)$

- *A pression constante,* lorsque n moles de gaz passent de T_1, V_1, P à T_2, V_2, P par chauffage, la pression extérieure étant égale à P :

$\Delta Q = n\,Cp(T_2 - T_1)$; $\Delta W = -\,P(V_2 - V_1)$

$\Delta U = n\,Cp(T_2 - T_1) - P(V_2 - V_1)$

Exprimons ΔU en fonction uniquement de la variation de température :

$$P\,V_2 = n\,R\,T_2 \quad ; \quad P\,V_1 = n\,R\,T_2$$

$$P(V_2 - V_1) = n\,R(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = n(Cp - R)(T_2 - T_1)$$

Ainsi ΔU peut être exprimée en fonction de T, P et V mais nous venons de montrer qu'il n'existe en fait que 2 variables indépendantes T et V par exemple car on peut toujours exprimer dP en fonction de dT et dV si l'on suppose que le gaz se comporte comme un gaz parfait :

$$PdV + VdP = RdT \quad ; \quad dP = \frac{R}{V}dt - \frac{P}{V}dV$$

- *A température constante,* lorsque n moles de gaz passent de T, P_1, V_1 à T, P_2, V_2 par détente dans le vide :

$$\Delta Q = 0 \quad ; \quad \Delta W = 0\ (Pext = 0) \quad ; \quad \Delta U = 0$$

L'énergie interne ne dépend donc ni du volume, ni de la pression, elle ne dépend que de la variation de température. En conséquence, quel que soit la transformation

$$\Delta U = n\,Cv\,\Delta T = n(Cp - R)\Delta T$$

impliquant la «relation de Mayer»

$$\boxed{Cv = Cp - R}$$

Remarquons donc que dans tous les cas, on peut écrire :

$$\Delta U = n\,Cv\,\Delta T = \Delta Q + \Delta W$$

et qu'en conséquence Cv ne doit plus être considérée uniquement comme un coefficient calorifique mais comme un coefficient énergétique car $n\,Cv\,\Delta T$ peut représenter du travail et de la chaleur.
Dans certains cas, on fournit au système une chaleur $n\,Cp\,\Delta T$ mais le

système ne conserve pour lui que la part n Cv ΔT et il restitue l'excédent n R ΔT au milieux extérieur sous forme de travail des forces de pression extérieure.

Exercice. — *1) 5 moles de gaz parfait passent de l'état V_1 = 50 l, T_1 = 300 K à l'état V_2 = 100 l, T_2 = 280 K en se détendant contre la pression atmosphérique constante égale à 1 atm. Calculer ΔW, ΔU, ΔQ (Cv = 5 cal.K^{-1}.mol^{-1})*

$\Delta W = -$ Pext $\Delta V = -\ 1{,}0135.10^5.50.10^{-3} = -\ 5.10^3$ J
$\Delta U =$ n Cv $\Delta T = 5.5.4{,}18.(-20) = -\ 2090$ J
$\Delta Q = \Delta U - \Delta W = 2910$ J

Remarquons que le terme n Cv ΔT est négatif alors que ΔQ est positif.

2) n moles de gaz parfait passent de l'état P, V_1, T_1 à l'état P, V_2, T_2 par chauffage, la pression extérieure étant toujours égale à P. Exprimer ΔQ, ΔW et ΔU.

$\Delta Q =$ n Cp(ΔT) ; $\Delta W = -\ P(V_2 - V_1) = -$ n R ΔT
$\Delta U =$ n Cp $\Delta T -$ n R ΔT

avec bien entendu $\Delta U =$ n Cv ΔT.

Aspect microphysique de l'énergie interne :
La définition du gaz parfait impliquant qu'aucune force ne s'exerce contre les molécules (en dehors des chocs), toute l'énergie du gaz parfait est sous forme d'énergie cinétique d'agitation thermique :

$$U = Ec = \frac{3}{2} n R T$$

Pour une mole de gaz, on peut définir l'énergie interne molaire u et tenir compte de l'énergie potentielle propre à chaque molécule (masse, interaction noyau-électrons...) :

$$u = u_0 + \frac{3}{2} R T$$

Nous pouvons pour le gaz parfait monoatomique accéder à la valeur de

$$Cv = \frac{du}{dT} = \frac{3}{2} R = 12{,}475 \text{ J.K}^{-1}\text{.mol}^{-1}.$$

Cette valeur est en excellent accord avec les valeurs expérimentales pour l'hélium et l'argon qui sont des gaz monoatomiques. Pour les gaz polyatomiques comme H_2, N_2, O_2 il faut faire intervenir en plus de l'énergie de translation, l'énergie de rotation et de vibration.

On montre alors que (1) $Cv = \frac{5}{2} R = 21$ J.K^{-1}.mol^{-1} pour les gaz diatomi-

(1) En thermodynamique statistique, on montre que au maximum $U = p\frac{RT}{2}$ pour une mole de particules, p étant le nombre de degrés de liberté avec p = 6A − 3 − r (A = atomicité de la molécule, r = nombre de possibilités de rotation). Ainsi pour O_2 : A = 2, r = 2 et p = 7 à température suffisamment élevée.

ques au voisinage de la température ordinaire.
En fait rappelons que Cv varie avec T et la nature du gaz et que l'on utilise les valeurs expérimentales des tables de constante.

□ **Transformation quasi statique.** — Un système subit une transformation quasi statique lorsqu'en l'absence de tout frottement, il évolue infiniment lentement. Température et pression ont à chaque instant une valeur unique dans tout le système. On peut considérer que la transformation correspond à une suite d'états d'équilibre du système. Ainsi, dans ces conditions, le travail des forces de pression extérieure est $\Delta W = \int - Pext + dV = \int - PdV$ (car $P = Pext$ pendant toute la transformation).

a) **Isothermes.** Soit n moles de gaz parfait passant de T, P_1, V_1 à T, P_2, V_2 au cours d'une transformation quasi statique :

$$\Delta W = \int - PdV = \int - \frac{n R T}{V} dV = - n R T \int \frac{dV}{V}$$

$$\Delta W = n R T \operatorname{Log} \frac{V_1}{V_2}$$

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0 = \Delta Q + \Delta W$$

$$\Delta Q = - \Delta W = n R T \operatorname{Log} \frac{V_2}{V_1}$$

En fonction de P ($P_1V_1 = P_2V_2$)

$$\Delta Q = - \Delta W = n R T \operatorname{Log} \frac{P_1}{P_2}$$

Un tel dispositif transforme intégralement la chaleur en travail mais il ne s'agit pas d'une transformation cyclique permettant le fonctionnement d'un moteur.

b) Adiabatiques. Il s'agit d'une transformation quasi statique sans échange de chaleur

$$\Delta Q = 0 \quad ; \quad \Delta U = n Cv \Delta T = \int - PdV$$

$$n Cv \, dT = - PdV = - n \frac{RT}{V} dV \qquad (1)$$

ou

$$- n R \frac{dV}{V} = n Cv \frac{dT}{T}$$

En intégrant

$$- R \operatorname{Log} \frac{V_2}{V_1} = Cv \operatorname{Log} \frac{T_2}{T_1} \text{ ou } \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{R}{Cv}} = \frac{T_2}{T_1}$$

soit $T V^{R/Cv} = cst$

En posant $\frac{R}{Cv} = \gamma - 1$ avec $\frac{Cp}{Cv} = \gamma$; $\boxed{T V^{\gamma - 1} = cst}$

De l'équation $PV = n\,R\,T$ de la relation (1) et en éliminant dT, on tire :

$$\frac{dP}{P} = -\left(\frac{Cv + R}{R}\,\frac{R}{Cv}\right)\frac{dV}{V}$$

Comme $Cv + R = Cp$, on a :

$$-\frac{Cp}{Cv}\frac{dV}{V} = \frac{dP}{P} = -\gamma\frac{dV}{V}$$

En intégrant (γ = cst) :

$$\text{Log}\frac{P_2}{P_1} = \gamma\,\text{Log}\frac{V_1}{V_2}$$

$$\boxed{P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} \qquad \text{ou} \qquad PV^{\gamma} = \text{cst}}$$

Exercice. — *Calculer la température en fin de compression, de l'air contenu dans le cylindre d'un moteur Diesel dont le rapport volumétrique* ($\frac{V\ initial}{V\ final}$) *est de 15. La température initiale est de 27° C. Il s'agit d'une compression adiabatique quasi statique.*

$$(\gamma = \frac{Cp}{Cv} = 1{,}4)$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{cst}\ ;\ (\frac{V_i}{V_f})^{\gamma-1} = \frac{T_f}{T_i}\ ;\ (15)^{1.4-1} = \frac{T_f}{300}\ ;\ T_f = 88\ 5\ \text{K}$$

□ **Applications du 1er principe aux systèmes ouverts, métabolisme basal.** — L'homme étant un système ouvert, le premier principe s'applique si l'on n'oublie pas les échanges de matière avec le milieu extérieur. Ainsi, par exemple pour déterminer la quantité de chaleur produite par un être vivant, en supposant qu'il n'ait pas pris de poids, elle est équivalente à la quantité de chaleur fournie par la combustion des éléments introduits moins la quantité de chaleur que l'on pourrait obtenir à partir de la combustion des excréments. De même, cette quantité de chaleur fournie par la combustion des aliments est indépendante des réactions intermédiaires que subissent ceux-ci.
On détermine la dépense d'énergie physiologique d'un individu que l'on appelle métabolisme basal (ou de base). Selon la définition de Du Bois c'est la quantité de chaleur produite par mètre carré de surface corporelle et par heure par un sujet à jeun depuis douze heures au moins, étendu, au repos depuis une demi-heure au moins, vêtu et dans un milieu maintenu à une température comprise entre 16° C et 18° C. La dépense énergétique moyenne d'un individu au repos est d'environ 2500 calories par jour (1500 cal pour les processus physiologiques et 1000 cal environ dues au travail musculaire, la régulation thermique et la digestion).

□ **Enthalpie.** — Le travail reçu par un système ΔW peut être considéré comme la somme $\Delta W^* + \Delta Wp$ avec

ΔW^* = travail utile effectivement utilisé sous forme d'un échange avec une machine (motrice ou réceptrice) ou donnant du travail sous forme électrique par exemple.

ΔWp = travail des forces de pression extérieure échangée avec l'atmosphère ambiante et qui n'a pas d'intérêt pratique mais qui doit être inclu dans le bilan d'énergie interne.

Dans ces conditions le bilan énergétique s'écrit :

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q + \delta W^* + \delta Wp$$

dont les 2 seuls termes accessibles directement du point de vue expérimental sont δW^* et δQ

$$dU - \delta Wp = \delta Q + \delta W^*$$

Dans le cas où $P = Pext$

$$\delta Wp = - PdV$$

$$dU + PdV = \delta Q + \delta W^*$$

L'expression $dU + PdV$ est la différentielle de la fonction $U + PV$ si P est constante. La grandeur $U + PV$ est une fonction d'état puisque U, P et V sont des fonctions d'état. On l'appelle enthalpie et on la représente par le symbole H.

$$\boxed{H = U + PV}$$

Son intérêt pratique existe pour l'étude des transformations à pression constante égale à la pression extérieure et alors $dH = \delta Q + \omega W^*$. On retiendra la relation suivante

$$\boxed{\Delta H = \Delta Q + \Delta W^* \qquad (P = Pext = cst)}$$

Enthalpie de réaction

Cette fonction permet d'éliminer l'expression inévitable du travail des forces de pression extérieure pour toutes les transformations à pression constante égale à la pression extérieure. Son intérêt est donc évident en chimie et en biochimie où toutes les réactions normales ont lieu dans ces conditions. Il n'y a, en effet, que les réactions chimiques à volume constant qui s'identifient avec la fonction énergie interne. Dans ce cas : $Qv = \Delta U$ (Qv chaleur de réaction à T et V constants).

Dans tous les autres cas, s'il n'y a pas d'échange de travail utile :

$$\boxed{Qp = \Delta H}$$

(Qp chaleur de réaction à T et P constants).

Rappelons que les définitions de Qp et Qv impliquent qu'aucun travail utile n'est échangé entre le système (réactifs + produits) et le milieu extérieur. On définit plus couramment l'enthalpie de réaction; on peut soit la trouver dans les tables dans les conditions standard $\Delta H^0_{298\ K}$ (298 K, P = 1 atm) soit la calculer à partir des enthalpies standard de formation d'un corps pur ΔH^0_f

que l'on trouve également dans les tables en appliquant la loi de Hess :

$$\boxed{\Delta H^0_{298\ K} = \Sigma\ \Delta H^0_f(\text{produits}) - \Sigma\ \Delta H^0_f(\text{réactifs})}$$

Connaissant $\Delta H^0_{298\ K}$ on peut calculer ΔH^0_T en appliquant la relation :

$$\Delta H^0_T = \Delta H^0_{298\ K} + (\Delta Cp).\Delta T$$

$\Delta Cp = Cp(\text{produits}) - Cp(\text{réactifs})$ (valeur moyenne des Cp)

ou $$\Delta H^0_T = \Delta H^0_{298\ K} + \int(\Delta Cp)\,\Delta T$$

Transformation du gaz parfait

Il est possible d'étudier les cas envisagés pour l'énergie interne selon la même démarche mais l'emploi de la fonction enthalpie est surtout intéressant pour les *transformations quasi statiques isobares*. Ainsi si n moles de gaz passent des conditions P, V_1, T_1 à P, V_2, T_2 en se détendant de façon à ce que la pression du gaz soit toujours égale à la pression extérieure constante en fournissant une quantité de chaleur, on a :

$$\Delta H = \Delta Q + \Delta W^* \quad ; \quad \Delta W^* = 0$$
$$\Delta H = \Delta Q = n\ Cp\ (T_2 - T_1)$$

Remarquons que $\Delta W = -P(V_2 - V_1) = -n\ R\ (T_2 - T_1)$ et que l'on retrouve $\Delta U = \Delta Q + \Delta W = n(Cp + R)(T_2 - T_1)$
$= n\ Cv\ (T_2 - T_1)$

Considérons une *transformation à température constante :* n moles de gaz passent de P_1, V_1, T à P_2, V_2, T en subissant une détente dans le vide. Comme ΔU, ΔH ne dépend que de T, en conséquence $\Delta H = 0$. La relation $\Delta H = \Delta Q$ ($\Delta W^* = 0$) ne s'applique pas car $P \neq Pext = 0$ mais on peut écrire que $\Delta U = \Delta Q + \Delta W = 0$ avec $\Delta W = 0$ ($Pext = 0$) donc $\Delta Q = 0 = \Delta H$. En conclusion, on montre que pour toutes les transformations du gaz parfait

$$\boxed{\Delta H = n\ Cp\ \Delta T} \qquad (\text{ou } \int n\ Cp\ dT)$$

(n Cp ΔT ne représentant pas uniquement une quantité de chaleur).

Exercices. — *n moles de gaz passent de P_1, V_1, T à P_2, V_2, T par une détente en ajustant la pression extérieure de façon qu'elle soit constamment égale à la pression du gaz. Calculer ΔU, ΔH, ΔW^*, ΔQ.*

Détente isotherme : $\Delta U = \Delta H = 0$
$\Delta W^* = 0$; la relation $\Delta H = \Delta Q + \Delta W^*$ ne s'applique pas car Pext n'est pas précisée constante. Pour calculer ΔQ, il faut utiliser le premier principe : $\Delta U = \Delta Q = \Delta W = 0$
$\Delta Q = -\Delta W = -(-\int PdV) = \int PdV$

Une pile à combustible fonctionnant à l'air libre et à 25° C réalise la réaction :

$$H_{2g} + \frac{1}{2} O_{2g} \rightarrow H_2O_l$$

L'enthalpie de formation de l'eau liquide dans les conditions standard est de − 68,32 kcal.mol^{-1}. Par mole formée, elle libère une quantité de chaleur de − 4440 cal. Quelle est l'énergie électrique que fournit cette pile par mole d'eau formée ?

$\Delta H = \Delta Q + \Delta W^*$

$\Delta H = \Delta H^0_{f(H_2O l)} = -68{,}32$ kcal.mol^{-1} ; $\Delta Q = -44400$ cal.mol^{-1}

$\Delta W^* = \Delta H - \Delta Q = (-68320 + 44400).4{,}18 = -10^5$ J

DEUXIEME PRINCIPE

ENTROPIE - ENERGIE LIBRE - ENTHALPIE LIBRE

☐ **Enoncé du deuxième principe.** — L'expression du travail des forces de pression – PdV et celui des forces électriques E.dq est sous la forme du produit d'une variable d'intensité (P et E) et de la variation d'une variable d'extensité (dV et dq). La chaleur, autre forme d'énergie, peut également se mettre sous la forme d'un tel produit. La température est la variable d'intensité, la variable d'extensité n'est pas utilisée dans la vie courante ce qui a contribué à la rendre mystérieuse. Il s'agit de l'entropie (S). Si comme les autres variables extensives citées précédemment elle était conservative, on écrirait tout simplement $\delta Q = TdS$ et la chaleur ne diffèrerait en rien des autres formes d'énergie. Mais ce n'est pas le cas, l'entropie n'est pas une grandeur extensive conservative. Elle possède des propriétés originales et c'est pour cette raison que le 2e principe lui est consacré.

2e principe : Pour tout système, il existe une fonction d'état appelée entropie de nature extensive.
Pour tout système fermé, le terme d'échange qui figure dans le bilan d'entropie est égal par définition à la quantité chaleur reçue (algébriquement) par le système divisée par la température thermodynamique du milieu extérieur qui fournit (ou reçoit) la chaleur. Le terme de source du bilan est obligatoirement positif ou nul

$$\Delta S = \Delta eS + \Delta\sigma$$

avec $\Delta eS = \dfrac{\Delta Q}{Text}$ et $\Delta\sigma \geqslant 0$

ΔeS : entropie reçue du milieu extérieur
$\Delta\sigma$: entropie créée à l'intérieur du système
- $\Delta\sigma = 0$: transformation réversible
- $\Delta\sigma > 0$: transformation irréversible
- $\Delta\sigma < 0$: transformation impossible

Pour tout système ouvert, il faut considérer en plus un terme supplémentaire de convection (entropie liée à la matière échangée) en plus du terme de conduction $(\dfrac{\Delta Q}{Text})$

L'entropie, comme l'énergie interne, comme l'enthalpie, est une fonction d'état. L'unité d'entropie est le joule par kelvin ($J.K^{-1}$). Le clausius ($cal.K^{-1}$) est encore toléré.

☐ **Interprétation microphysique de l'entropie.** — Le bilan d'entropie est un bilan de désordre à l'échelle moléculaire.
Un système fermé peut échanger de la chaleur et du travail avec le milieu extérieur. Echange d'énergie impliquant l'intervention d'un grand nombre de particules dont les propriétés sont distribuées au hasard, la chaleur a un contenu de désordre, pas le travail. A la chaleur échangée ΔQ, correspond

l'échange de la quantité de désordre $\Delta eS = \frac{\Delta Q}{Text}$.

Mais du désordre peut apparaître spontanément à l'intérieur du système même en l'absence de tout échange, alors que l'ordre ne s'accroît jamais spontanément. Ce terme de source $\Delta\sigma$ est soit positif, soit nul mais jamais négatif.

Donnons quelques exemples de variation d'entropie (ou de création de désordre) à l'échelle moléculaire :

• **Entropie liée à la température :** A 0K, l'ordre dans un cristal est maximal, l'entropie est nulle. Si l'on augmente la température, les particules (molécules, ions ou atomes) commencent à vibrer de façon anarchique autour de leur position d'équilibre. Le désordre s'accroît et l'entropie croît avec la température. Ensuite apparaît l'*entropie de changement d'état* lors du passage à l'état liquide qui est plus désordonné que l'état solide, l'entropie croît encore lors de la fusion puis lors de l'augmentation de la température. Au passage à l'état gazeux, le désordre croît encore plus t l'entropie de vaporisation sera ainsi plus importante que l'entropie de fusion.

• **Entropie de mélange :** Le mélange de 2 gaz à température constante constitue un état moins ordonné que les 2 gaz pris à l'état pur sous la même pression. Il existe donc une entropie de mélange.

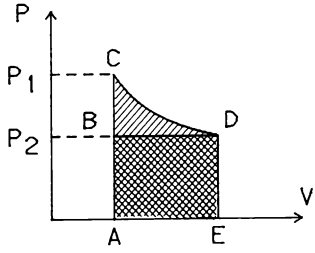
• **Entropie liée au volume :** Le désordre augmente lorsqu'un gaz voit son volume augmenter à température constante, l'entropie du système augmente alors de $n\ R\ Log \frac{V_2}{V_1}$.

En thermodynamique statistique, on étudie ainsi la répartition de N molécules prises à l'état gazeux dans un volume découpé en un certain nombre de cellules. Un *état* est défini par la connaissance du nombre de molécules présentes dans chacune des cellules. Une complexion C suppose connue la cellule dans laquelle se trouve chacune des molécules. Le système évolue vers un des états les plus probables c'est-à-dire ceux dont le nombre de complexions est le plus grand. Rechercher l'état d'état d'équilibre revient à chercher le maximum de la fonction : nombre de complexions. Nous venons de voir que l'entropie, pour un système isolé, est la fonction qui détermine le sens d'évolution et le terme ultime de celle-ci. Elle présente un maximum à l'état d'équilibre. Rechercher l'état d'équilibre d'un système revient à déterminer ce maximum pour lequel on a $\delta S = 0$ pour toute transformation infinitésimale. En conséquence, chercher l'équilibre c'est déterminer soit le maximum d'entropie, soit le maximum du nombre de complexions C. Ces 2 notions sont reliées mathématiquement dans la *relation de Boltzmann*

$$\boxed{S = k\ Log\ C}$$

$$k \text{ (constante de Boltzmann)} = \frac{R}{N} = 1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$$

☐ **Interprétation macroscopique de la création d'entropie.** — Il y a, par exemple, création d'entropie chaque fois qu'une possibilité de recueillir un travail mécanique est négligée.
Ainsi, lors de la détente d'un gaz, si P ≠ Pext, il y a création d'entropie.



Si le système à la pression P_1 est mis brutalement en contact à P_2, le travail recueilli est représenté par l'aire doublement hachurée ABDE. Par contre, si la détente est quasi statique réversible (elle a lieu suivant une suite d'états d'équilibre) le travail que l'on peut recueillir et $\delta W_R = P.dV$ et il est représenté par l'ensemble de l'aire hachurée ACDE. Dans le premier cas, on a donc perdu le travail ΔW_0 représenté par l'aire du triangle curviligne BCD. On montre par le calcul que $\Delta W_0 = T\,\Delta\sigma$.

Le fait que le 2e principe implique que l'ordre ne s'accroît jamais spontanément mais que c'est toujours le désordre qui apparaît spontanément demande une explication dans le cas du système homme. En effet, l'homme est constitué d'atomes simples de (C, H, O, N) qui ne sont pas mélangés au hasard mais qui forment un système très ordonné. Ces atomes constituent ainsi les acides aminés qui s'associent pour donner des macromolécules (les protéines par exemple). Si l'on considère l'homme comme un système fermé n'échangeant pas de matière avec le milieu extérieur, il ne survit pas et ces molécules complexes se dégradent donc dans un système désordonné. Le 2e principe est donc respecté. Pour qu'il puisse survivre, il faut l'envisager comme un système ouvert H qui interéagit avec un autre système A avec lequel il est associé dans son bilan entropique de telle façon que

$$S_H + S_A = S_T \geqslant 0 \text{ avec } |S_A| > |S_H| \text{ avec } S_H < 0 \text{ et } S_A > 0$$

Dans ces conditions H peut tendre vers un système plus ordonné et voir son entropie diminuer sans être en contradiction avec le 2e principe.
D'une façon générale, pour les *systèmes ouverts*, il faut introduire un terme supplémentaire dans le bilan d'entropie (ou de désordre) en tenant compte du désordre contenu dans la matière échangée. Ainsi un individu qui absorbe du glucose et de l'oxygène en rejetant une quantité équivalente d'eau et de gaz carbonique reçoit le désordre contenu dans les deux premiers corps et perd le désordre contenu dans l'eau et le gaz carbonique. Le bilan s'écrit alors (en absence de chaleur échangée)

$$\Delta S = S(\text{glucose}) + S(O_2) - S(Co_2) - S(H_2O) + \Delta\sigma$$

Bilan entropique d'un autre autotrophe (plante verte) :
Une plante verte est aussi un système plus ordonné que le milieu qui l'entoure. Dans son bilan entropique lors de sa croissance qui ne doit pas être en contradiction avec le deuxième principe, il faut faire intervenir les échanges avec le soleil sous forme de lumière équivalente à de la chaleur ΔQ; $\Delta Q'$ étant la chaleur qu'elle rejette.

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{Tsoleil} + \frac{\Delta Q'}{Text} + S(CO_2) + S(N_2) + S(H_2O) - S(\text{substances organiques formées}) + \Delta\sigma$$

plante (<0) $\quad >0 \quad <0 \quad >0 \quad >0$

On constate donc que pour que ΔS soit < 0, il faut que $\frac{\Delta Q'}{Text}$ soit en valeur absolue supérieure à la somme de tous les autres termes tous positifs. (En particulier, la plante en prélevant du gaz carbonique et de l'azote atmosphérique pour trouver le carbone et l'azote de sa substance produit des molécules organiques ayant un contenu de désordre plus faible que les réactifs.) En fait, le terme $\frac{\Delta Q}{Tsoleil}$ est très petit car Tsoleil est d'environ 5000 K alors que Text $\cong$ 300 K impliquent que pour un $\Delta Q'$ relativement petit, $\frac{\Delta Q'}{Text}$ permet d'avoir un bilan global négatif.

□ **Calculs de variation d'entropie d'un système.**
Entropie reçue (ou échangée)
L'entropie reçue est calculée facilement car $\Delta eS = \frac{\Delta Q}{Text}$.

Exercice. — *1 mole d'eau s'échauffe de 20 à 80° C au contact du milieu extérieur à 80° C; calculer ΔeS.*

$$\Delta Q = 18(80-60).4{,}18 \quad ; \quad \Delta eS = \frac{1504}{80} = 18{,}8 \text{ J.K}^{-1}$$

Par contre, pour calculer ΔS, il faut connaître $\Delta\sigma$. Ce calcul est simple lorsque $\Delta\sigma = 0$, c'est-à-dire quand la transformation est réversible car dans ce cas et dans ce cas seulement $\Delta S = \Delta eS$. Nous imaginerons donc si la transformation est irréversible, une transformation réversible équivalente à la transformation irréversible et comme S est une fonction d'état, on a $\Delta S_R = \Delta S_{IR} = \Delta S$. Connaissant ΔS et ΔeS, on aura donc $\Delta\sigma = \Delta S - \Delta eS$. Par définition, une transformation est réversible si l'on peut envisager une

autre transformation qui ramène à la fois le système et le milieu extérieur à l'état initial. Envisageons, par exemple la *variation d'entropie d'un corps pur avec la pression à température constante* dans les 2 cas :

- **transformation réversible :** menée de telle façon que P passe de P_1 à P_2 de façon quasi statique ($P = Pext$ et on passe progressivement de P_1 à P_2 par $P_1 + \varepsilon$, $P_1 + 2\varepsilon \ldots P_1 + N\varepsilon = P_2$) à température constante. Pour une mole de gaz $\Delta W = -\int PdV$ avec

$$-PdV = VdP = \frac{RT}{P}dP;\ \Delta W = RT\int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{P} = RT\ Log\frac{P_2}{P_1}$$

$$\Delta T = 0 \quad ; \quad \Delta U = 0 = \Delta Q + \Delta U \quad ; \quad \Delta Q = -RT\ Log\frac{P_2}{P_1}$$

$$\Delta eS = -R\ Log\frac{P_2}{P_1}$$

Inversement on peut revenir à l'état initial de la même façon ($P_2 - \varepsilon$, $P_2 - 2\varepsilon \ldots$). On a $\Delta W' = -\int_{P_2}^{P_1} PdV = -\Delta W$; $\Delta Q' = -\Delta Q$; $\Delta eS' = -\Delta eS$.
Pour l'ensemble du cycle $\Delta S = 0$ et $\Delta\sigma = -\Delta eS - \Delta eS' = 0$.

- **transformation irréversible :** P_1 passe brusquement de P_1 à P_2 et inversement à température constante. Dans ces conditions :
$\Delta W = -P_2(V_2 - V_1)$ $(P_2 = Pext = cst)$

$$\Delta Q = -\Delta W = P_2(V_2 - V_1) \quad ; \quad \Delta eS = \frac{P_2(V_2 - V_1)}{Text}$$

$$\Delta W' = -P_1(V_1 - V_2) \quad (P_1 = Pext = cst)$$

$$\Delta Q' = -\Delta W' = P_1(V_1 - V_2) \quad ; \quad \Delta eS = \frac{P_1(V_1 - V_2)}{Text}$$

Pour l'ensemble du cycle $\Delta S = 0$ et

$$\Delta\sigma = -\Delta eS - \Delta eS' = -\frac{P_2(V_2 - V_1) - P_1(V_1 - V_2)}{Text}$$

$$= \frac{(V_1 - V_2)(P_2 - P_1)}{Text}$$

Comme on suppose que $P_2 - P_1 > 0$, $V_1 - V_2 > 0$ donc $\Delta\sigma > 0$

Nous venons de montrer qu'il est équivalent de dire qu'une transformation est réversible et que la création d'entropie $\Delta\sigma = 0$. Nous avons pu calculer $\Delta\sigma$ dans le cas d'une transformation irréversible et montrer que $\Delta\sigma > 0$. Dans le cas d'un échange de chaleur à pression constante, on pourrait faire une démonstration identique. On retiendra qu'un échange de chaleur est réversible si les 2 corps en présence sont constamment à la même température. Rappelons que pour calculer ΔS, nous envisagerons toujours une transformation équivalente réversible. De la démonstration précédente, nous retiendrons le

résultat concernant la variation d'entropie ΔS lors de la *détente d'un gaz parfait de P_1 à P_2 à température constante.*

$$\Delta S = - n R \text{ Log} \frac{P_2}{P_1} = n R \text{ Log} \frac{V_2}{V_1}$$

La variation d'entropie d'un corps pur avec la température (Calcul envisagé pour un corps pur passant réversiblement de T_1 à T_2 tel que $\Delta S = \Delta eS$)

$$\Delta S = nC \text{ Log} \frac{T_2}{T_1} \text{ (pour un solide ou un liquide)}$$

$$\Delta S = n \text{ Cv Log} \frac{T_1}{T_1} \text{ (pour un gaz à volume constant)}$$

$$\Delta S = n \text{ Cp Log} \frac{T_2}{T_1} \text{ (pour un gaz à pression constante)}$$

Exercices. — *1) Faire le bilan d'entropie d'une mole de gaz parfait passant de P_1 à P_2 par une détente dans le vide ($V_2 = 2V_1$)*

$\Delta S = R \text{ Log } 2$; $\Delta eS = 0$ ($\Delta Q = 0$) ; $\Delta \sigma = \Delta S$

2) On chauffe une mole de glace de 0° C à 25° C en la mettant en contact avec un milieu extérieur à 25° C. Faire le bilan d'entropie détaillé. ($Lf = 1440$ cal.mol^{-1}).

Le changement d'état en condition réversible $H_2O_s \rightarrow H_2O_l$ se fait suivant une suite d'états d'équilibre entre le mélange d'eau liquide et de glace à 0° C et l'échange de chaleur avec le milieu extérieur à la même température :

$$\Delta S_f = \frac{1440.4,18}{273} = 22 \text{ J.K}^{-1}$$

Dans la transformation réelle, l'échange de chaleur se fait avec la source à 298 K donc

$$\Delta eS_f = \frac{1440.4,18}{298} = 20,2 \text{ J.K}^{-1} \quad ; \quad \Delta \sigma_f = 1,85 \text{ J.K}^{-1}$$

$$\Delta S_{H_2O_l} = \Delta eS_{H_2O_l} + \Delta \sigma$$

$$\Delta S_{H_2O_l} = 18.4,18.\text{Log} \frac{298}{273} = 6,6 \text{ J.K}^{-1}$$

$$\Delta eS_{H_2O_l} = \frac{18.4,18.25}{298} = 6,3 \text{ J.K}^{-1}$$

$$\Delta \sigma_l = \Delta S_{H_2O_l} - \Delta eS_{H_2O_l} = 0,3 \text{ J.K}^{-1}$$

$$\Delta S_T = \Delta S_f + \Delta S_{H_2O_l} = 28,6 \text{ J}$$

Remarquons donc qu'il n'y a pas création d'entropie lors d'un changement d'état ($\Delta S = \Delta eS$) lorsque la source de chaleur avec laquelle le système réalise l'échange est à la température d'équilibre du changement d'état (0° C pour la fusion de l'eau sous 1 atm par exemple) mais qu'il y a création si la source est à une température différente.

☐ **Troisième principe et entropie de réaction. —**

3e principe : L'entropie de tout corps pur cristallisé sous sa forme la plus stable est nulle en zéro absolu : $s^0_{0K} = 0$

Ce 3e principe de la thermodynamique appelé également principe de Nernst permet d'attribuer une valeur absolue à l'entropie des corps purs, car on peut calculer s^0_T pour tous les corps purs à l'aide des formules envisagées précédemment ($\Delta S = f(T)$). En fait, on trouve dans les tables l'entropie standard s^0_{298K}. Son utilité intervient surtout en chimie car il conduit à l'entropie de référence d'une réaction ΔS^0_T.

$$\Delta S^0_T = \Sigma s^0_T \text{ (produits)} - \Sigma s^0_T \text{ (réactifs)}$$

☐ **Energie libre.** — Si l'on considère une transformation dite monotherme au cours de laquelle le système échange de la chaleur avec une source à température Text constante et égale à la température du système (L'Homme est un système monotherme puisqu'il n'échange de la chaleur qu'avec l'atmosphère). Cette transformation est en général irréversible mais, d'une part, on peut faire son bilan énergétique : $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$ et, d'autre part, envisager une transformation équivalente mais réversible. Dans ce cas,

$$\Delta eS = \Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \text{ et } \Delta U = T\Delta S + \Delta W_R$$

ΔW représente la variation d'une fonction d'état puisque U, S et T sont des fonctions d'état et que T est une constante. On la représente par le symbole F(ou Fext) et on l'appelle «Energie libre»

$$F = U - TS$$

ΔF est la portion de l'énergie interne que l'on peut recueillir sous forme de travail dans le cas d'une transformation réversible c'est-à-dire idéale. Le travail ΔW reçu par un système monotherme au cours d'une évolution quelconque irréversible est toujours supérieur à la variation d'énergie libre

$$\Delta W \geqslant \Delta F$$

($\Delta W = \Delta W_R = \Delta F$ pour une transformation réversible).

☐ **Enthalpie libre.** — La variation de la fonction énergie libre implique dans son contenu le travail des forces de pression extérieure qui n'est pas un travail utile récupérable. Par ailleurs, en chimie et biochimie, la majorité des transformations a lieu à la pression de l'atmosphère ambiante Pext constante. Pour ces raisons, on utilise surtout les bilans d'enthalpie prenant directement en compte le travail utile ΔW^*.

$$\Delta H = \Delta Q + \Delta W^* \quad (P = Pext = cst)$$

Si l'on considère une transformation réversible

$$\Delta Q = T\Delta S \text{ et } \Delta W^*_R = \Delta H - T\Delta S$$

ΔW_R^* est la variation d'une fonction d'état si T est constant puisque H, S et T sont des fonctions d'état. On la représente par G et on l'appelle «enthalpie libre»

$$\boxed{G = H - TS}$$

Notons que la formule $dG = dH - TdS$ n'est valable que si $P = Pext = cst$ et que si T est également une constante. La variation de l'enthalpie libre représente alors la portion de l'énergie interne que l'on peut recueillir sous forme de travail utile ($\Delta G = \Delta U - T\Delta S + P\Delta V$) dans le cas d'une transformation réversible c'est-à-dire idéale. Le travail utile ΔW^* reçu par un système au cours d'une transformation quelconque irréversible est toujours supérieur à la variation d'enthalpie libre

$$\boxed{\Delta W^* \geqslant \Delta G}$$

($\Delta W^* = \Delta W_R^* = \Delta G$ pour une transformation réversible.)

G peut donc être considérée comme un indicateur potentiel de réserve de travail utile que constitue (à T et P constantes) le système pour l'utilisateur éventuel :

- si l'opérateur fournit du travail utile ($\Delta W^* > 0$), le système est récepteur, G augmente mais l'imperfection des dispositifs (transformation irréversible) conduit à emmagasiner moins de réserve de travail utile qu'on ne fournit de travail utile ($\Delta G \leqslant \Delta W^*$).
- si l'opérateur prélève du travail utile, le système est moteur ($\Delta W^* < 0$), G diminue mais l'imperfection des dispositifs empêche de recueillir la totalité du travail utile ($\Delta W^* \geqslant \Delta G$ ou $|\Delta W^*| \leqslant |\Delta G|$). La baisse de G du système est supérieure au prélèvement effectif.

Ainsi, si l'homme réalise la combustion d'une mole de glucose, en supposant que toute l'énergie récupérée puisse être utilisée pour produire un travail musculaire, on peut affirmer que le travail utile ΔW^* fourni de cette façon sera obligatoirement tel que :

$$|\Delta W^*| < |\Delta G_{combustion\ glucose}| \text{ (ou } \Delta W^* > \Delta G \text{ en valeur agébrique)}$$

car l'homme ne travaille pas dans des conditions réversibles.

Variation de l'enthalpie libre avec la température et la pression. — Il s'agit de connaître la valeur de ΔG à T et à P connaissant la valeur de ΔG à T_0 et P_0.

$G = H - TS \quad ; \quad dG = dH - TdS - SdT \quad ; \quad H = U + pV;$

$dH = dU + d(PV) = TdS - PdV + PdV + VdP = TdS + VdP$

$dG = TdS + VdP - TdS - SdT = VdP - SdT$

En conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c} dG = VdP - SdT \\ \text{A T constant : } dG = VdP \text{ ou } \Delta G = \int VdP \\ \text{A P constant : } dG = -SdT \text{ ou } \Delta G = -\int SdT \end{array}}$$

Exercice. — *Calculer la variation d'enthalpie libre lorsque 3 moles d'oxygène passent de $P_0 = 1$ atm, $T_0 = 298$ K à $P = 10$ atm et $T = 373$ K ($s^0_{O_2} = 49$ cal.K^{-1}.mol^{-1})*

Pour une mole $\Delta g = \int vdP - \int sdT$

$$\int vdP = \int \frac{RT}{P} dP = RT \int \frac{dP}{P} = RT \text{ Log } \frac{P}{P_0}$$

$$= 8{,}314.298.\text{Log}10 = 5705 \text{ J}$$

$$\int sdT = 49.4{,}18\ (373 - 298) = 15361 \text{ J}$$

(On suppose que l'entropie molaire reste constante dans l'intervalle de température considéré.)
Pour 3 moles $\Delta G = 3\ (5705 + 15361) = 63198$ J

Remarque : Pour les solides et liquides, on peut utiliser directement $\Delta G = V\Delta P$ car V ne varie pratiquement pas avec P. Ces variations en fonction de la pression sont faibles et souvent négligées. Ce n'est pas le cas avec les variations de température.

Rendement inergétique
La comparaison du travail effectif en condition d'irréversibilité et du travail en condition de réversibilité permet de définir un *rendement énergétique* $\mathcal{N}$:

- système moteur : $\mathcal{N} = \dfrac{\Delta W^*}{\Delta W^*_R}$

- système récepteur : $\mathcal{N} = \dfrac{\Delta W^*_R}{\Delta W^*}$

Exercice. — *On réalise l'électrolyse de l'eau à 25° C. Quelle énergie faut-il fournir au minimum pour électrolyser 1 mole d'eau ?*
Après une première expérience, on constate qu'il a fallu fournir 310.000 J. Quel est le rendement énergétique ?
On donne $\Delta H^0_{f(H_2O_l)} = -68320$ *cal*
$s^0_{H_2O_l} = 16{,}72$; $s^0_{O_2} = 49$; $s^0_{H_2} = 31{,}2$ cal.K^{-1}

La réaction d'électrolyse est :

$$H_2O_l \rightarrow H_2 + \frac{1}{2}O_2 \qquad \Delta H = 68320.4{,}18 = 285578 \text{ J}$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} s^0_{O_2} + s^0_{H_2} - s^0_{H_2O_l} = 40.4{,}18 = 167 \text{ J.K}^{-1}$$

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = 285578 - 298.167 = 235812 \text{ J}$$

Dans les meilleures conditions (transformation réversible) il faut fournir au moins $\Delta W^*_R = \Delta G$
Le dispositif étant imparfait, la transformation est irréversible et ΔW^* fourni = 310.000 J

$$\mathcal{N} = \frac{235812}{310.000} = 0{,}76 \text{ (soit 76 \%)}$$

□ **Enthalpie libre de réaction.** — Les données thermodynamiques que l'on trouve dans les tables comportent l'enthalpie libre standard de formation ΔG_f^0 des corps purs. (Eventuellement, la connaissance de ΔH_f^0, s_{298K}^0 permet également de calculer ΔG_f^0). G étant une fonction d'état, l'enthalpie libre de réaction dans les conditions standard ΔG_{298K}^0 est donnée par la relation :

$$\Delta G_{298K}^0 = \Sigma \Delta G_{f(produits)}^0 - \Sigma \Delta G_{f(reactifs)}^0$$

ΔG_T sera calculée à partir de la relation $dG = VdP - SdT$ démontrée précédemment. En fait le problème important est qu'il faut envisager l'enthalpie de réaction entre gaz parfaits engagés dans un mélange car si l'on connaît la pression totale P on ne connait pas les pressions partielles p_i de chaque constituant du mélange au cours de l'évolution de la réaction. On démontre que pour une réaction du type :

$$aA + bB \rightleftarrows xX + yY$$

$$\Delta G = \Delta G_T^0 + xRT \text{ Log } p_x + yRT \text{ Log } p_y - aRT \text{ Log } p_A - bRT \text{ Log } p_B$$

$$\Delta G = \Delta G_T^0 + RT \text{ Log } \frac{p_X^x \, p_Y^y}{p_A^a \, p_B^b}$$

(ne figurent, dans le terme en logarithme, que les corps à l'état gazeux).
D'une façon générale, une réaction sera spontanée ($\Delta W^* = 0$, ancien dispositif pour receuillir du travail) et se déroulera tant que son enthalpie libre diminue.
En résumé :

- si $\Delta G < 0$: la réaction est spontanée, elle est dite exergonique
- si $\Delta G > 0$: la réaction ne peut pas se faire spontanément sans apport d'énergie de l'extérieur, elle est dite endergonique
- si $\Delta G = 0$: la réaction est à l'équilibre

Une réaction se déroulant au sein d'un mélange se poursuit spontanément tant que $\Delta G < 0$, le terme ultime de l'évolution est atteint quand $\Delta G = 0$; réactifs et produits sont alors présents simultanément, on dit qu'ils sont à l'équilibre.

Réactions couplées. Les variations d'enthalpie libre sont additives dans une chaîne de réactions liées et consécutives.

Ainsi soit	$A \rightarrow B$	ΔG_1	
	$\underline{B \rightarrow C}$	ΔG_2	
dont le bilan total est	$A \rightarrow C$	ΔG_T	$(\Delta G_T = \Delta G_1 + \Delta G_2)$

L'ensemble de ces réactions peut avoir lieu spontanément à la seule condition que $\Delta G_T < 0$. Ainsi ΔG_1 peut être > 0 et la réaction $A \rightarrow B$ avoir lieu si ΔG_2 est < 0 et $> |\Delta G_1|$ tel que $\Delta G_1 + \Delta G_2 < 0$. Ce mécanisme intervient souvent en biochimie, par exemple :

glucose + phosphate → glucose − 6 phosphate + H_2O (1)

$\Delta G_1^0 = + 3{,}3 \text{ kcal.mol}^{-1}$

$ATP + H_2O \rightarrow ADP + \text{phosphate} \quad (2)$

$\Delta G_2^0 = -7{,}3 \text{ kcal.mol}^{-1}$

bilan :

glucose + ATP → glucose − 6 phosphate + ADP

$\Delta G_T^0 = -4{,}0 \text{ kcal.mol}^{-1}$

□ **Calcul de la constante d'équilibre d'une réaction.** — A l'équilibre $\Delta G = 0$, pour une réaction en phase gazeuse du type :

$$aA + bB \rightleftharpoons xX + yY$$

$$\Delta G = \Delta G_T^0 + RT \operatorname{Log} \frac{p_X^x \, p_Y^y}{p_A^a \, p_B^b} = 0$$

On pose $Kp = \dfrac{p_X^x \, p_Y^y}{p_A^a \, p_B^b}$: constante d'équilibre de la réaction, relative aux pressions partielles des espèces gazeuses à une température T.

$$\boxed{\operatorname{Log} Kp = -\frac{\Delta G_T^0}{RT}}$$

Pour une réaction en phase liquide (ou éventuellement aussi en phase gazeuse), on peut exprimer cette constante d'équilibre en fonction des concentrations ($c_i = n_i/V$; $p_i = c_i RT$)

$$Kc = \frac{[X]^x \, [Y]^y}{[A]^a \, [B]^b} = \frac{Kp}{RT^{(x+y)-(a+b)}} \qquad (R = 0{,}082 \text{ atm.l}^{-1}.\text{K}^{-1})$$

Dans le cas des réactions hétérogènes (présence d'un corps solide par exemple), ce dernier ne figure pas dans l'expression de la constante d'équilibre, mais attention, il intervient dans le calcul de ΔG_T^0 de la réaction.

POTENTIELS CHIMIQUES - ELECTROCHIMIE CHANGEMENTS DE PHASES

□ **Potentiels chimiques.** — Un système constitué uniquement de corps purs peut être exprimé en autant de sous-systèmes qu'il y a de moles de corps purs. Ainsi, on peut définir l'enthalpie libre molaire $g = h - Ts$ (ou $g = u + Pv - Ts$) où seules les variations de ces grandeurs ont un sens physique car elles peuvent être mesurées expérimentalement. g varie avec T et P et suit, bien entendu, les mêmes lois que ΔG définie précédemment car $\Delta G = \Sigma n_i g_i$.

L'enthalpie libre d'un mélange est égale à la somme des enthalpies libres de chacun des constituants pris à l'état pur, sous une pression égale à sa pression partielle dans le mélange. On peut ainsi calculer la contribution de chaque mole du constituant, mais pour bien se rappeler qu'il appartient à un mélange, on parlera non plus d'enthalpie libre molaire, mais de *potentiel chimique* (symbole μ)

g : enthalpie libre molaire d'un corps pur μ : potentiel chimique définissant la contribution d'une mole d'un constituant à l'enthalpie libre d'un mélange.

Pour un gaz parfait : $\mu_i = g_i^0 + RT \text{ Log } p_i$; mais comme la pression partielle n'est pas accessible expérimentalement et que l'on connait seulement la pression totale P ou la composition du mélange, on utilise surtout l'expression de μ en fonction des fractions molaires x_i des constituants.

$$x_i = \frac{p_i}{P} \text{ et } \Sigma x_i = 1$$

En conséquence : $\mu_i = g_i^0 + RT \text{ Log } P + RT \text{ Log } x_i$

avec $$g_i = g_i^0 + RT \text{ Log } P$$

et $$\boxed{\mu_i = g_i + RT \text{ Log } x_i}$$

Le potentiel chimique d'un gaz parfait au sein d'un mélange (à T et P) est égal à la somme de son enthalpie libre molaire lorsqu'il se trouve à l'état pur sous la pression totale P et à la température T et d'un terme correctif dépendant de sa fraction molaire.

Solutions idéales

La notion de potentiel chimique est surtout employée pour les solutions. On appelle solution idéale toute solution dont le comportement est similaire à celui des mélanges de gaz parfaits. Certaines solutions sont pratiquement idéales quelles que soient les proportions des corps en présence (solutions composées de corps organiques), d'autres ne le sont que pour des solutions très diluées (solutions ioniques ou électrolytiques). Mais toutes les solutions réelles tendent vers l'état idéal lorsque la concentration tend vers 0. Par définition, pour une solution idéale :

$$\boxed{\mu_i = \mu_i^* + RT \text{ Log } x_i}$$

μ_i^* est indépendant de x_i, il ne dépend que de T et de P. Comme $\mu_i^* = \mu_i$ si $x_i \to 1$, μ^* représenterait g (enthalpie libre molaire du gaz pur) pour un gaz. En fait, pour les solutions, le potentiel chimique est surtout exprimé en fonction de la concentration c_i des corps.

Comme $x_i = \frac{n_i}{N}$ avec $n_i = V.c_i$; $x_i = \frac{Vc_i}{N}$

Pour un corps pris à l'état pur : $\mu^* = g$

$$\mu = g + RT \text{ Log} \frac{V}{N} + RT \text{ Log } c$$

et $\frac{V}{N}$ ne variant pas avec la composition de la solution, on pose

$\mu_i^\bullet = g_i + RT \text{ Log} \frac{V}{N}$ et l'expression du potentiel chimique est alors dans tous les cas :

$$\boxed{\mu_i = \mu_i^\bullet + RT \text{ Log } c_i}$$

$\mu_i^\bullet$ est le potentiel chimique pour $c_i = 1$.

Remarque : En fait, pour les solutions idéales à faibles concentrations on devrait exprimer le potentiel chimique en fonction de la molalité (m = nombre de moles de soluté par kg de solvant) indépendante de la température.

$$\mu_i = \mu_i^\bullet + RT \text{ Log } m_i$$

mais pour des solutions diluées $m_i \cong c_i$.
Notons donc, qu'en solution, l'état standard est : 298,16 K, 1 atm, corps en solution à la molalité 1.

Cas des ions : la neutralité électrique des solutions électrolytiques implique la présence d'un couple d'ions. En conséquence, la détermination expérimentale du potentiel chimique d'un ion isolé est impossible. Pour cette raison, on a attribué à l'ion H_{aq}^+, un potentiel chimique, une entropie et une capacité calorifique nulles dans les conditions de référence (1 atm, corps en solution à la molalité 1) à toute température.

Exercice. — *Calculer ΔH_f^0 de Cl_{aq}^- en solution molaire M.* *($\Delta H_{f(HCl_{aq})}^0 = -40$ kcal).*

$HCl_{aq} \rightarrow H_{aq}^+ + Cl_{aq}^-$

Comme $\Delta H_{f(H^+_{aq})}^0 = 0$, $\Delta H_{f(Cl^-_{aq})}^0 = \Delta H_{f(HCl_{aq})}^0 = -40$ kcal

Solutions réelles
Quand on ne peut plus considérer la solution comme idéale (solutions électrolytiques non suffisamment diluées : $c_i > 10^{-2}$ mol/l),
la formule $\mu_i = \mu_i^\bullet + RT \text{ Log } c_i$ ne peut plus s'appliquer rigoureusement et pour tenir compte des interactions entre les ions on définit une nouvelle grandeur *l'activité* a qui représente une concentration corrigée. On pose $a = \gamma c$ ou γ est le coefficient d'activité qui est toujours inférieur à 1 (ou égal à 1 pour une solution idéale). Dans ce cas, on écrit :

$$\mu_i = \mu_i^\bullet + RT \text{ Log } a_i$$

$$\text{ou } \mu_i = \mu_i^\bullet + RT \text{ Log } \gamma_i c_i$$

Constante d'équilibre en solution

A partir de l'utilisation des potentiels chimiques, on peut retrouver directement la valeur de la constante d'équilibre Kc relative aux concentrations molaires. On démontre que pour une réaction en solution du type

$$aA + bB \rightleftharpoons xX + yY$$

et à une température T :

$$\Delta G = (x\mu_x^0 + y\mu_y^0 - a\mu_A^0 - b\mu_B^0) + RT \text{ Log } \frac{[X]^x\,[Y]^y}{[A]^a\,[B]^b}$$

$x\mu_X^0 + y\mu_Y^0 - a\mu_A^0 - b\mu_B^0 = \Delta G_T^0$ (enthalpie libre de référence en solution)

A l'équilibre $\Delta G = 0$ et comme $Kc = \dfrac{[X]^x\,[Y]^y}{[A]^a\,[B]^b}$:

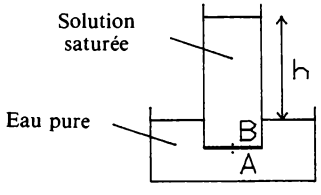
$$\boxed{\text{Log } Kc = -\frac{\Delta G_T^0}{RT}}$$

Rappelons que dans l'expression de Kc à une température T ne figurent que les espèces effectivement dissoutes mais que dans le cas de la présence d'un corps solide celui-ci intervient dans le calcul de ΔG_T^0 (cas des réactions de précipitation).

Osmose

Une membrane de vessie de porc se laisse traverser par l'eau, beaucoup plus difficilement par du saccharose. On parle de semi-perméabilité. Ces phénomènes osmotiques sont constamment présents en biologie car les membranes biologiques sont le plus souvent semi-perméables.

Considérons un tube ouvert sur l'atmosphère à une des extrémités et fermé par une membrane semi-perméable à l'autre, rempli d'une solution aqueuse sucrée et plongeant dans une cuve remplie d'eau.



On observe que le niveau de l'eau dans le tube devient très supérieur à celui du bac ce qui est contraire à la loi de l'hydrostatique. Par ailleurs la saveur sucrée n'apparaît pas dans le bac (la paroi était imperméable au saccharose). L'interprétation de ce phénomène est thermodynamique. Tant que l'eau traverse la membrane le potentiel chimique de l'eau est plus grand en A qu'en B. A l'équilibre, le potentiel chimique de l'eau est le même. Appelons g^0 cette valeur commune (le potentiel chimique de l'eau est bien en effet l'enthalpie libre molaire de l'eau pure en A).

En B, le potentiel chimique de l'eau est celui de l'eau pure à la pression P_A, augmenté du terme de mélange (qui est négatif) : RT Log x_{eau} et augmenté de la variation de pression $v\rho gh$ (v : volume molaire de l'eau, ρ : masse volumique de la solution).

En conséquence, à l'équilibre, si le potentiel chimique de l'eau est le même de part et d'autre de la membrane :

$$\gamma^0 = g^0 + RT \text{ Log } x_{eau} + v\Delta P \quad (\Delta P = \rho gh)$$

impliquant que :

$$RT \text{ Log } x_{eau} = - v\Delta P$$

Pour être en équilibre avec le solvant pur, une solution doit donc se trouver à une pression supérieure. Cette surpression est appelée *pression osmotique*.
Pour les solutions diluées : $\text{Log } x_{eau} = \text{Log}(1 - x_{solute}) \cong - x_{solute}$. Or

$x_{solute} \cong \dfrac{n}{n_{eau}}$ $(n = n_{solute})$. Alors :

$\Delta P = \dfrac{RTn}{n_{eau}v}$ avec $n_{eau}v = V$ (V = volume de l'eau ou de la solution).
En conclusion, on utilise la relation :

$$\Delta P = \frac{RTn}{V}$$

La pression osmotique a même valeur que la pression d'un gaz parfait dont on prendrait un nombre de moles égal à celui du nombre de moles de soluté et qui serait enfermé dans un volume égal à celui de la solution.
Deux solutions possédant la même pression osmotique (par rapport au solvant pur) sont dites *isotoniques*. Si leur pression osmotique est différente celle qui possède la plus forte est dite *hypertonique*, l'autre *hypotonique*.

Exercices. — *1) Calculer la pression osmotique nécessaire pour mettre en équilibre 1 g de saccharose (M = 342) dissous dans un litre de solution à 37° C.*

$$\Delta P = \frac{RTn}{V} = \frac{8{,}314.310}{342.10^{-3}} = 7{,}54.10^3 \text{ Pa}$$

soit une dénivellation d'environ 77 cm d'eau.

2) Expliquer pourquoi les hématies (globules rouges du sang, constituées d'une membrane enfermant le liquide cellulaire) éclatent lorsqu'on les plonge dans l'eau pure.

La solution intérieure de l'hématie a une pression osmotique importante (à peu près égale à celle du sérum sanguin). Pour être en équilibre avec l'eau pure, il faut que cette solution subisse une surpression importante. A défaut, l'eau tend à pénétrer dans l'hématie. La membrane étant peu dilatable et de résistance mécanique limitée, la pression intérieure augmente... jusqu'à atteindre la limite de rupture conduisant à l'éclatement de l'hématie.

□ **Electrochimie.** — Piles et cellules d'électrolyse sont des sytèmes qui mettent en jeu un échange d'énergie électrique avec le milieu extérieur. Les trans-

formations ayant lieu généralement à température et pression constantes, on a :

- pour une pile : $\Delta G \leqslant \Delta W^* = -\Delta E\,\Delta q \quad (\Delta W^* < 0)$
- pour une cellule : $\Delta G \leqslant \Delta W^* = \Delta E\,\Delta q \quad (\Delta W^* > 0)$

ΔE représentant la différence de potentiel mesurée ou appliquée et Δq la quantité d'électricité qui traverse le circuit.
Elles sont constituées d'une anode siège d'une réaction élémentaire d'oxydation anodique (perte d'électrons) et d'une cathode siège d'une réaction élémentaire de réduction cathodique (gains d'électrons). Elles sont reliées par une jonction métallique et une jonction électrolytique (transfert d'ions). Globalement elles sont donc le sigèe d'une réaction d'oxydoréduction dont le ΔG de la réaction permet de calculer ΔE en condition de fonctionnement réversible et réciproquement.
Une pile pouvant alimenter une cellule, les polarités sont donc différentes.

Pile :	**Cellule :**
Pôle − : anode	Pôle − : cathode
Pôle + : cathode	Pôle + : anode
$\Delta G = -\Delta EnF$	$\Delta G = \Delta EnF$

n : nombre de moles d'électrons échangées au cours de la réaction
F : faraday (= 96500 C)

Exercice. — *Une pile est constituée à partir de la réaction :*

$$2Ag^+ + Cu \rightarrow 2Ag + Cu^{++} \qquad \Delta G = -21{,}3 \text{ kcal}$$

Définir l'anode et la cathode de la pile et écrire les réactions élémentaires; calculer ΔE.

Anode : électrode de cuivre métallique plongeant dans ses ions
$Cu \rightarrow Cu^{++} + 2e$
Cathode : électrode d'argent métallique plongeant dans ses ions
$2Ag^+ + 2e \rightarrow 2Ag.$

$$\Delta E = -\frac{\Delta G}{nF} = \frac{21300.4{,}18}{2.965000} = 0{,}46 \text{ V}$$

Potentiel d'électrode
Une pile est constituée par 2 systèmes rédox (ou demi-piles) appelés électrodes. Les formes oxydée et réduite peuvent être dissoutes (Fe^{3+}/Fe^{2+}). Un métal plongeant dans ses ions constitue une électrode métallique. Une électrode à gaz ($Cl_2 + 2e \rightarrow 2Cl^-$) est formée d'un gaz au contact d'une électrode inerte (platine) et les ions en solution par exemple.
En attribuant un potentiel de référence nul à toute température à l'électrode à H_2 ($H_2 \rightarrow 2H^+ + 2e$), on peut affecter à toute demi-pile un potentiel en mesurant la f.e.m. qui apparait aux bornes de la pile constituée du système rédox étudié et d'une électrode à H_2 à la même température. On trouve dans les tables le potentiel standard E^0 qui est le potentiel de référence à la température de 25° C et que [Ox] = [Red] = 1mol/l par exemple.

A partir des données thermodynamiques, on peut calculer le potentiel d'une électrode à partir de la relation $\Delta G = - nF \Delta E$. Par exemple, pour déterminer le potentiel du couple Cl^-/Cl_2, on constitue la pile $H_2/H^+//Cl^-/Cl_2$ correspondant à la réaction :

$$Cl^- + H^+ \rightarrow 1/2\ Cl_2 + 1/2\ H_2$$

avec $\Delta G = 1/2\ \mu_{Cl_2} - \mu_{Cl^-} + 1/2\ \mu_{H_2} - \mu_{H^+}$

comme par convention $\mu_{H^+} - 1/2\ \mu_{H_2} = 0$, $\Delta G = 1/2\ \mu_{Cl_2} - \mu_{Cl^-}$

Relation de Nernst
L'influence des concentrations sur le potentiel d'électrode est donné par la relation de Nernst

$$Ox + n\,e \rightarrow Red : E = E^0 + \frac{RT}{n\,F} \text{Log} \frac{[Ox]}{[Red]}$$

$$\text{à } 25°\ C : E = E^0 + \frac{0{,}059}{n} \log \frac{[Ox]}{[Red]}$$

$$Ox + qH^+ + n\,e \rightarrow Red + \frac{q}{2} H_20 : E = E^0 + \frac{RT}{n\,F} \text{Log} \frac{[0x][H^+]^q}{[Red]}$$

$$\text{à } 25°\ C : E = E^0 + \frac{0{,}059}{n} qph + \frac{0{,}059}{n} \log \frac{[Ox]}{[Red]}$$

Pour ce dernier type de réaction, on utilise le *potentiel apparent* valable à un pH déterminé. Ainsi, *le potentiel normal biologique* π^0 est défini à pH = 7.

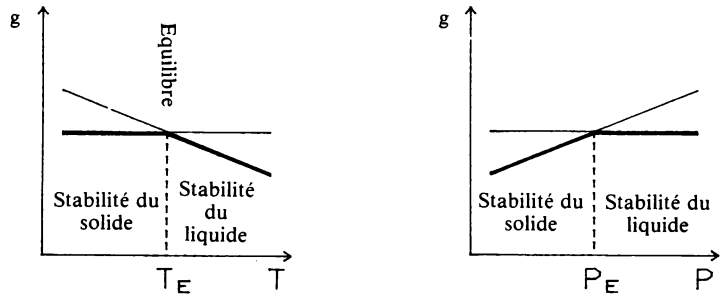
$$\pi^0 = E^0 - \frac{0{,}059.7.q}{n} \text{ (à } 25°\ C)$$

L'utilisation pratique de ces notions est importante en chimie et biochimie.

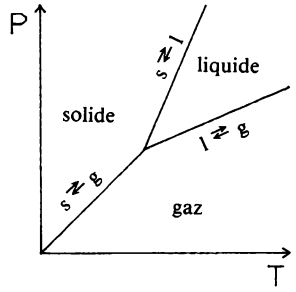
□ **Changements d'état d'un corps pur.** — Chaque corps pur peut se présenter sous trois aspects (ou états) physiques : solide (un ou plusieurs aspects), liquide et gaz (ou vapeur). Chacun de ses aspects caractérise une phase qui peut exister seule ou coexister avec une autre. Ainsi, lors de la fusion (passage de l'état solide à l'état liquide) ou lors de la solidification (opération inverse), un système peut être constitué n_l moles de solide et n_l moles de liquide tel que l'enthalpie libre de ce système :

$G = n_l g_l + n_s g_s$ (g_s et g_l : enthalpie libre molaire du liquide et du solide)

et il évoluera tant que G pourra diminuer pour être la plus faible. En conséquence, l'état physique vers lequel tend un corps pur est celui pour lequel l'enthalpie libre molaire est la plus faible. Le plus souvent, le corps pur sera sous un seul état dans des conditions de température T et de pression P.
Pour connaître, les domaines de stabilité du solide et du liquide par exemple, il suffit de tracer les graphes $g_s(\frac{T}{P_0})$, $g_l(\frac{T}{P_0})$ en fonction de T à pression constante P_0 et les graphes $g_s(\frac{P}{T_0})$, $g_l(\frac{P}{T_0})$ en fonction de P à température constante



A T_E, P_0 et P_E, T_0 : $g_l = g_s$ l'équilibre est possible entre les 2 phases, dans tous les autres cas, une seul phase sera présente.
Ces graphes peuvent être déterminés également pour la sublimation (passage de l'état solide à l'état gazeux) et la vaporisation.
En rassemblant les données relatives aux équilibres entre solide, liquide et gaz, on peut tracer un diagramme P, T représentant les domaines de stabilité de chacun des états d'un corps limités par les courbes d'équilibre entre 2 phases. La courbe de sublimation coupant la courbe de vaporisation en T, ce point présente la coexistence entre les 3 phases, il s'agit du *point triple*.



Pour déterminer la pente de ces courbes, on peut utiliser la *relation de Clapeyron* :
A l'équilibre entre 2 phases, entre un point 1 de coordonnées P, T et un autre point 2 de coordonnées P + dP et T + dT

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{v_1 - v_2} = \frac{h_1 - h_2}{T(v_1 - v_2)}$$

(s : entropie molaire, h : enthalpie molaire, v : volume molaire).

TESTS

1. *L'homme vivant est-il un système ouvert ou fermé ?*
2. *Une masse de gaz a à 37° C un volume de 5 l sous une pression de 710 mm Hg. Quel volume occupe ce gaz dans les conditions normales ?*
3. *Il faut fournir 14580 cal pour transformer 20 g de glace à − 20° C, en vapeur de 100° C. Calculer la chaleur latente molaire de vaporisation de l'eau (c_{glace} = 0,5 cal.K^{-1}.g^{-1}; $Lf_{(H_2O)}$ = 1440 cal.mol^{-1}).*
4. *On dissout 30 litres d'Hcl gazeux dans de l'eau liquide à 300 K et sous 1 atm. Quel est le travail reçu par le système ?*
5. *Enoncer le premier et le deuxième principe.*
6. *Calculer la variation d'énergie interne de 2,5 moles d'air passant de 300 K à 500 K et dont le volume passe de 0,05 m^3 à 0,075 m^3 ($Cv_{(air)}$ = 20,9 J.K^{-1}.mol^{-1})*
7. *Une mole d'air passe des conditions* **1** *(P_1 = 1 atm, V_1 = 24,45 l, T_1 = 298 K) aux conditions* **2** *(P_2 = 4 atm, V_2 = 6,1 l, T_2 = 298 K). Calculer ΔU et ΔH ($C_{p(air)}$ = 29,26 J.K^{-1}.mol^{-1}).*
8. *Calculer l'enthalpie standard de la réaction :*

$$2NH_3 + 3/2\ O_2 \rightleftarrows N_2 + 3H_2O$$

sachant qu'une pile utilisant cette réaction libère une chaleur de 250 kJ par mole et fournit un travail de 130 kJ.

9. *Définir une réaction exergonique et une réaction endergonique.*
10. *On chauffe 10 g d'eau liquide de 20° C à 100° C en la mettant en contact avec un milieu extérieur à 100° C. Calculer l'entropie créée.*

ELECTRICITE

ELECTROSTATIQUE

CHAMP ELECTROSTATIQUE

☐ **Charges électriques.** — De nombreuses expériences ont pu être interprétées en postulant l'existence de charges électriques qui peuvent être de deux types : soit positives, soit négatives. Leur première propriété fondamentale est que deux charges de même signe se repoussent, tandis que deux charges de signes contraires s'attirent. Remarquons que les signes adoptés sont purement conventionnels et ne résultent pas d'un caractère intrinsèquement «positif» ou «négatif» de certaines charges.
Nous savons maintenant que toutes les charges possibles sont des multiples d'une *charge élémentaire e*; la charge de l'électron vaut $q = -e$ et celle du proton $q = +e$. Les charges élémentaires sont donc liées à des corpuscules et leurs évolutions sont donc celles de ces derniers.
En S.I., l'unité de charge est le coulomb (C) et la charge élémentaire vaut $1{,}6.10^{-19}$ C; la plupart des charges rencontrées en électrostatique sont très grandes par rapport à e et on peut donc les considérer comme continues.

☐ **Atomes et ions.** — On désigne généralement par Z le **numéro atomique** d'un atome. Ceci signifie que le noyau de l'atome comporte Z protons (plus un nombre de neutrons, pouvant varier, conduisant à des *isotopes*) et que, si l'atome est *neutre*, Z électrons «gravitent» autour du noyau. Un ou plusieurs électrons peuvent être perdus ou gagnés par un atome, donnant naissance à un *ion* respectivement positif ou négatif.

Certains atomes ont un (ou plusieurs) électron peu lié; quand ils sont groupés en réseaux, ils s'ionisent en laissant cet électron libre (ou presque) de se déplacer dans le réseau. On a alors affaire à un *conducteur* dans lequel ces électrons «libres» (électron de valence) peuvent se mouvoir facilement, créant ainsi des courants électriques ou permettant la conduction de la chaleur.
Inversement un corps est *isolant* s'il est dépourvu d'électrons libres. On peut charger un tel corps, par exemple en lui arrachant des électrons par frottement, l'expérience est classique; il apparaît alors comme globalement positif (ou négatif dans d'autres expériences). Toutefois, à la différence d'un conducteur, un isolant conserve les charges à l'endroit où elles sont créées.
Remarquons enfin qu'un *système isolé*, c'est-à-dire sans contact avec un autre, garde une charge constante; seule la répartition des charges peut être modifiée.

☐ **Loi de Coulomb.** — La force d'interaction électrostatique exercée par une charge q placée en O sur une charge q' placée en M ($\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$, $\vec{u}$ vecteur unitaire) est

$$\boxed{\vec{F} = k\frac{qq'}{r^2}\vec{u}}$$

En S.I., la constante k vaut 9.10^9; on l'exprime souvent sous la forme

$$\boxed{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

où ε_0 est la *permittivité du vide* (valeur numérique $\frac{1}{36\pi\ 10^9}$).

Exercice. — *Comparer les interactions électrique et gravitationnelle entre deux protons (charge $e = 1{,}6.10^{-19}C$, constante de gravitation $G = 6{,}67.10^{-11}$, masse $m = 1{,}7.10^{-27}$ kg).*

En module on a :

- pour la force de gravitation $Fg = G\frac{m^2}{r^2}$

- pour la force électrostatique $Fe = k\frac{e^2}{r^2}$

D'où

$$\frac{Fe}{Fg} = \frac{ke^2}{Gm^2} = 1{,}2.10^{36}$$

L'interaction électrique est incomparablement plus forte; dans les études portant sur les particules chargées on néglige presque toujours l'interaction gravitationnelle.

□ **Principe de superposition.** — On admet que l'interaction électrostatique entre deux charges immobiles est donnée par la loi de Coulomb, même si d'autres charges sont présentes. Cette supposition est justifiée par ses conséquences qui sont vérifées expérimentalement.
Le principe de superposition permet donc de déterminer la force exercée sur une charge donnée par un ensemble de n charges :

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}$$

où $\vec{F}_i$ désigne la force exercée par la $i^{ème}$ charge telle qu'elle est donnée par la loi de Coulomb.
Il faut insister sur le fait qu'il s'agit d'une *somme vectorielle*.

Exercice. — *On dispose les charges q, $-q$, $-3q$ et $2q$ aux points respectifs $A(a,0)$, $B(0,-a)$, $C(-a,0)$ et $D(0,a)$.*
1) Quelles sont les coordonnées de la force qui s'exerce sur la charge Q placée en $O(0,0)$? et son module ?
2) Même question qu'en 1) mais pour une charge $-Q$? et pour une charge $5Q$?

Faire un dessin pour mieux se représenter tout ceci. On appelle $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unitaires des axes.

1) Soit $\vec{F}_A$ la force exercée par la charge q placée en A :

$$\vec{F}_A = -k\frac{qQ}{a^2}\vec{i}$$

On a de même :

$$\vec{F}_B = k\frac{qQ}{a^2}\vec{j} \quad ; \quad \vec{F}_C = -k\frac{3qQ}{a^2}\vec{i} \quad ; \quad \vec{F}_D = k\frac{2qQ}{a^2}\vec{j}$$

soit au total : $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = -k\frac{qQ}{a^2}(4\vec{i} + 3\vec{j})$

et $$F = ||\vec{F}|| = 5\frac{|qQ|}{a^2}$$

2) Pour une charge $-Q$ on aurait $\vec{F'} = -\vec{F}$ et pour $5Q$, $\vec{F''} = 5\vec{F}$

□ **Champ électrique.** — En général, la force électrostatique qui s'exerce sur une charge q placée en un point donné est *proportionnelle à q* c'est-à-dire qu'il existe un vecteur $\vec{E}$ tel que :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$$

$\vec{E}$ est le **champ électrique** en ce point; on devrait l'exprimer en $N.C^{-1}$ (newtons.coulombs^{-1}) mais en pratique on utilise des volts/mètre ($V.m^{-1}$) - nous verrons pourquoi ultérieurement.
Le champ électrique est numériquement égal à la force qui s'exercerait sur une charge de 1 coulomb (attention : le champ électrique *n'est pas* une force !).

Avec les mêmes notations que précédemment, la loi de Coulomb permet de déterminer le champ électrique $\vec{E}$ créé en M par la charge q placée en O :

$$\vec{F} = k\frac{qq'}{r^2}\vec{u} = q'\vec{E}$$

nous avons disposé une charge d'essai q' en M; on a donc :

$$\boxed{\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{u}}$$

De même que pour les forces, l'application du principe de superposition permet de dire que le champ créé en un point par un ensemble de charges est la somme vectorielle des champs créés par chacune d'entre elles, ou, s'il y a n charges :

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i}$$

Exercice. — *On dispose sur l'axe des x une charge $q = 10^{-6}$ C au point A d'abscisse $x = 1$ m et une charge $-q$ au point B d'abscisse -1 m.*

1) Déterminer le champ au point M(2,0).
2) Déterminer le champ au point N(0,1).

Faire une figure si nécessaire; $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les vecteurs unitaires des axes.
1) Si x est l'abscisse de M on a :

$$\vec{E} = \frac{kq}{(x-1)^2}\vec{i} - \frac{kq}{(x+1)^2}\vec{i} = kq\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)\vec{i} = \frac{8}{9}kq\vec{i}$$

soit $E = 8.10^3\ V.m^{-1}$

2) Remarquer que le triangle ABN est isocèle.
Soient $\vec{u_A}$ et $\vec{u_B}$ les vecteurs unitaires colinéaires et de même sens que $\vec{AN}$ et $\vec{BN}$ respectivement :

$$\vec{u_A} = \frac{1}{||\vec{AN}||}.\vec{AN} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{j}) \quad ; \quad \vec{u_B} = \frac{1}{||\vec{BN}||}.\vec{BN} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$$

On a : $\vec{E} = k\frac{q}{AN^2}\vec{u_A} - k\frac{q}{BN^2}\vec{u_B} = \frac{kq}{2}(\vec{u_A}-\vec{u_B}) = -\frac{kq}{\sqrt{2}}\vec{i}$

d'où $E = \frac{kq}{\sqrt{2}} = 6{,}4.10^3\ V.m^{-1}$

Le champ sur l'axe des x et celui sur l'axe des y ont la même direction mais sont de sens opposés.

□ **Distribution de charges continue.** — Ainsi que nous l'avons dit plus haut, les charges électriques sont discrètes; toutefois, à notre échelle, le grand nombre de charges élémentaires mises en cause, même pour des charges nous apparaissant faibles, nous autorise à représenter les charges électriques comme une sorte de fluide continu. Si elles sont réparties sur une surface, on peut définir une *densité superficielle de charge* :

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

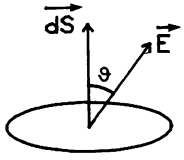
où dq désigne la charge répartie sur la surface dS. On définit de même une *densité volumique de charge* :

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

où dq désigne la charge contenue dans le volume dV.
On peut, du moins en principe, subdiviser une distribution quelconque de charges en éléments de surface ou de volume assimilés chacun à une charge ponctuelle dq; le champ créé par l'ensemble des charges serait obtenu par sommation de ces champs. En pratique, ceci n'est possible que dans des cas très simples compte-tenu du fait qu'il s'agit d'une *sommation vectorielle*.

□ **Théorème de Gauss.** — On appelle *flux* d'un vecteur $\vec{E}$ à travers une surface $\vec{dS}$ (on représente la surface par un vecteur orthogonal à celle-ci dont le module est numériquement égal à son aire) la quantité

$$d\Phi = \vec{E}.\vec{dS} = E\,dS\cos\Theta$$



Remarque : Si le vecteur était une vitesse, le flux représenterait un débit volumique.

On définit de même le flux de $\vec{E}$ à travers une surface quelconque comme la somme des flux élémentaires à travers les éléments de cette surface :

$$\Phi = \int d\Phi = \iint_S \vec{E}.\vec{dS}$$

Le signe $\iint_S$ indique que la sommation est étendue à la surface S.

Le résultat particulièrement important pour l'électrostatique est le **théorème de Gauss :**

Si q_{int} désigne la somme des charges à l'intérieur d'une surface fermée,

le flux de $\vec{E}$ à travers cette surface vaut $\frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$:

$$\iint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Quant la symétrie est suffisante, il est possible de déterminer Φ assez facilement et donc d'en tirer le champ $\vec{E}$.

□ **Principaux résultats.** —

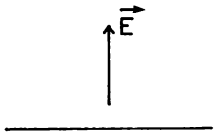
* Champ à l'extérieur d'une sphère uniformément chargée :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\vec{u}$$

où le champ est déterminé en M tel que $\vec{OM} = r\,\vec{u}$, O étant le centre de la sphère. Tout se passe comme si la charge totale était concentrée en O.

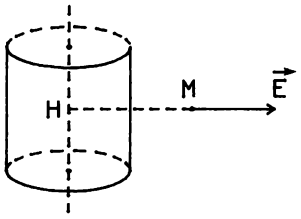
Remarque : le théorème de Gauss s'applique aussi au champ de la pesanteur; c'est pourquoi il est légitime de représenter l'attraction terrestre comme celle d'une masse ponctuelle située au centre de la Terre.

* Champ au voisinage d'un film infiniment mince uniformément chargé :



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

* Champ créé par une charge uniformément répartie sur un cylindre de rayon R :



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0\,r}$$

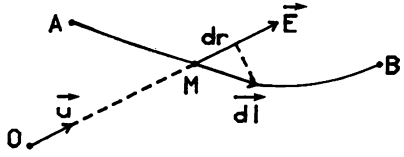
où HM = r et λ est la charge par unité de longueur. Le cylindre est considéré comme infiniment long.

POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

☐ **Circulation du vecteur $\vec{E}$.** — De manière analogue au travail d'une force, on définit la circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe AB par :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{E}\,.\vec{dl}$$

Considérons le champ $\vec{E}$ créé par une charge q placée en O; quelle est sa circulation quand on passe d'un point A à un point B ?



La circulation de $\vec{E}$ le long de AB ne dépend pas de la trajectoire : $\vec{E}$ dérive d'un potentiel.

Grâce au principe de superposition, on peut étendre ce résultat au champ créé par une distribution quelconque de charges.

□ **Détermination du potentiel.** — Pour le champ créé par une charge ponctuelle on cherche une fonction V telle que

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{E}.\vec{dl} = V_A - V_B$$

En comparant avec l'expression trouvée précédemment, on peut écrire :

$$V = \frac{kq}{r} + \text{constante}$$

Quand il n'y a pas de charges à l'infini, on peut sans inconvénient y prendre le potentiel nul d'où

$$\boxed{V = k\frac{q}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Ceci s'étend sans difficulté :

$V = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$ distribution discrète

$V = k\iiint_V \frac{\rho dV}{r}$ distribution en volume

$V = k\iint_S \frac{\sigma dS}{r}$ distribution en surface

Le calcul direct du potentiel est beaucoup plus simple que celui du champ, toutes les sommations portant ici sur des scalaires.

□ **Champ et potentiel.** — On retrouve des relations analogues à celles rencontrées en mécanique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

ou, en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\ ;\quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\ ;\quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

Remarque 1 : ces relations montrent que le champ est homogène à une différence de potentiel divisée par une longueur : l'unité de champ est donc bien le volt/mètre.

Rappelons d'autre part que $\int_{AB}\vec{E}.\vec{dl} = V_A - V_B$

Ainsi, si on connaît le potentiel dans une région de l'espace (et pas seulement en un point !) on peut déterminer le champ en tout point de cette région et réciproquement.
Pour étudier un champ électrique, il est souvent utile de tracer les surfaces d'égal potentiel, les *équipotentielles*. En chaque point, le champ est orthogonal à l'équipotentielle qui y passe et il est dirigé dans le sens des potentiels décroissants; on trace ainsi les *lignes de champ*, tangentes en chaque point à $\vec{E}$, qui sont donc orthogonales aux équipotentielles.

Remarque 2 : le champ électrique peut subir des discontinuités, tandis que le potentiel est continu (une variation brusque de potentiel se traduirait par un champ infini).

□ **Travail des forces électrostatiques.** — Une charge q soumise au champ électrique $\vec{E}$ subit la force $\vec{F} = q\vec{E}$. Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est $dW = \vec{F}.\vec{dl} = q\vec{E}.\vec{dl}$, soit pour un déplacement de A à B :

$$W_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}.\vec{dl} = q \int_{\widehat{AB}} \vec{E}.\vec{dl}$$

d'où $$\boxed{W_{AB} = q(V_A - V_B)}$$

Exercice. — *Un électron (charge électrique − e) subit, en passant de A à B, une augmentation de potentiel d'un volt.*
1) Quel est le travail de la force électrostatique ?
2) S'il s'agit d'un électron libre, que lui est-il arrivé ?

1) $W_{AB} = -e(V_A - V_B) = (-1{,}6.10^{-19}) \times (-1) = 1{,}6.10^{-19}$ J
Cette énergie *à notre échelle* est très faible; c'est pourquoi on emploie souvent, dans de tels cas, une autre unité, l'électron-volt (eV) qui est beaucoup plus adaptée :

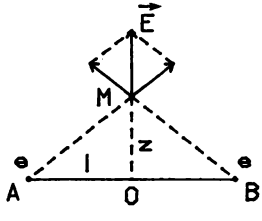
$$1 \text{ eV} = 1{,}6.10^{-19} \text{ J}$$

2) On peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}m\,v_B^2 - \frac{1}{2}m\,v_A^2 = q(V_A - V_B) = 1 \text{ eV}$$

L'électron a été accéléré : son énergie cinétique a augmenté de 1 eV. Dans les accélérateurs de particules on obtient des électrons ou des protons dont l'énergie cinétique va de quelques MeV (méga électron-volt = 10^6 eV) à quelques GeV (giga électron-volt = 10^9 eV); on les utilise pour étudier les constituants élémentaires (ou supposés tels) de la matière.

Exercice. — *On dispose deux protons en A et B (masse $m = 1{,}7.10^{-27}$ kg, charge $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, $AB = 2\,l = 2$Å).*
1) Déterminer le potentiel en tout point de la médiatrice Oz de AB (O milieu de AB).
2) En déduire le champ électrique en tout point de Oz.
3) On met un troisième proton sur Oz, très près de O puis on le laisse libre. Quelle vitesse va-t-il atteindre ?



1) Le potentiel en M vaut (OM = z)

$$V = k\frac{e}{MA} + k\frac{e}{MB} = \frac{2ke}{MA} = \frac{2ke}{\sqrt{l^2+z^2}}$$

2) Oz étant axe de symétrie, $\vec{E}$ est porté par Oz (pour les points de Oz)

$$E = -\frac{dV}{dz} = \frac{2kez}{(l^2+z^2)^{3/2}}$$

3) Le troisième proton va s'éloigner sur l'axe Oz (pourquoi ?). Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant du départ et t tendant vers l'infini :

$$\frac{1}{2}m\,v_\infty^2 - \frac{1}{2}m\,v_0^2 = \int_0^\infty e.Edz = e(V_0 - V_\infty)$$

Ici $v_0 = 0$ et $V_\infty = 0$ soit : $\frac{1}{2}m\,v_\infty^2 = eV_0$

comme $V_0 = \frac{2ke}{l} = \frac{2 \times 9.10^9 \times 1{,}6.10^{-19}}{10^{-10}} = 28{,}8$ volts, le proton acquiert une énergie cinétique de 28,8 électrons-volts, ce qui correspond à la vitesse :

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2e\,V_0}{m}} = 7{,}4.10^4 \text{ m/s}$$

DIPOLES ELECTRIQUES

□ **Polarisation des molécules.** — En règle générale une molécule est électriquement neutre. Toutefois, les barycentres des charges positives (protons) et négatives (électrons) peuvent ne pas coïncider; en ce cas la molécule est *polaire*. La molécule d'eau est polaire et nombre de propriétés de l'eau en sont des conséquences.

Des molécules *apolaires* peuvent être *polarisées* sous l'action d'un champ électrique : les protons se déplacent dans le sens du champ et les électrons en sens contraire et ainsi le centre des charges positives ne coïncide plus avec celui des charges négatives. Le comportement de la matière vis-à-vis des ondes électromagnétiques dépend essentiellement de ses possibilités de polarisation.

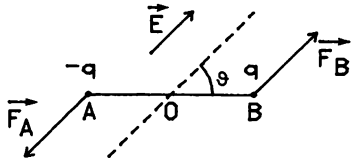
Dans tous les cas, on pourra représenter la molécule polaire par un **dipôle électrique**, c'est-à-dire un couple de charges opposées; on le caractérise par son **moment dipolaire**

$$\boxed{\vec{p} = q\,\vec{AB}}$$

où la charge − q est en A et la charge + q en B.

☐ **Dipôle dans un champ électrique.** — L'énergie potentielle électrostatique d'un dipôle est la somme de celles des deux charges :

$$E_p = - q V_A + q V_B = q(V_B - V_A) = - q(V_A - V_B)$$



Si on suppose $\vec{E}$ constant (la distance AB est toujours petite), on a

$$V_A - V_B = \vec{E}.\vec{AB}$$

d'où $$E_p = - q \vec{E}.\vec{AB} = - q \vec{AB}.\vec{E}$$

On a donc :

$$\boxed{E_p = - \vec{p}.\vec{E} = - q \, AB.E \cos \Theta}$$

La force électrostatique exerce un couple

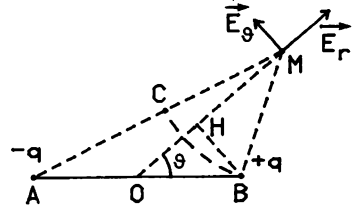
$$\vec{\Gamma} = \vec{F_B} \wedge \vec{AB} = q \vec{E} \wedge \vec{AB} = - q \vec{AB} \wedge \vec{E} = - \vec{p} \wedge \vec{E}$$

soit $$\boxed{\Gamma = - q \, E.AB \sin \Theta = - p \, E \sin \Theta}$$

Exercice. — *Etudier les positions d'équilibre du dipôle.*

L'énergie potentielle est minimale pour $\Theta = 0$ et maximale pour $\Theta = \pi$. On a donc :
- une position d'équilibre stable : $\Theta = 0$
- une position d'équilibre instable : $\Theta = \pi$.

☐ **Potentiel et champ créés par un dipôle.** — La distance AB est généralement petite; on pourra donc considérer que OM = r est grand vis-à-vis de AB : AB << r.



Le potentiel en M vaut :

$$V = k \frac{q}{MB} - k \frac{q}{MA} = kq\left(\frac{MA - MB}{MA.MB}\right)$$

On peut faire les approximations :

$$MA.MB \cong OM^2$$

$$MA - MB \cong MC \cong 2OH = AB \cos \Theta$$

d'où $$\boxed{V = k \frac{q.AB.\cos \Theta}{r^2} = k \frac{p \cos \Theta}{r^2}}$$

On en déduit :

- la composante *radiale* de $\vec{E}$: $E_r = - \frac{\partial V}{\partial r} = k.\frac{2p \cos \Theta}{r^2}$
- sa composante *tangentielle* : $E_\Theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \Theta} = k.\frac{p \sin \Theta}{r^3}$
- son module : $E = \sqrt{E_r^2 + E_\Theta^2} = k.\frac{p}{r^3} \sqrt{4\cos^2\Theta + \sin^2\Theta}$

Le champ créé par le dipôle varie en $\frac{1}{r^3}$

CONDENSATEURS

□ **Conducteurs en équilibre. Capacité.** — Dans un *conducteur parfait*, les charges sont libres de se mouvoir. Pour qu'un conducteur soit en équilibre, il faut que toutes les charges qu'il contient le soient; deux cas se présentent :
- les *charges intérieures* ne doivent subir aucune force
- les *charges de surface* ne peuvent subir qu'une force perpendiculaire à la surface.

En introduisant le champ électrique, on a :
A l'intérieur d'un conducteur en équilibre le champ électrique est donc nul; à la surface il est orthogonal à celle-ci. Le potentiel est donc constant : un conducteur en équilibre est un volume équipotentiel.

On utilise ces propriétés pour soustraire des appareillages aux influences électriques : le champ est nul aussi dans une cavité creusée dans un conducteur en équilibre. On entoure donc les zônes à protéger d'un *blindage* conducteur (un treillage métallique suffit souvent) qu'on maintient au même potentiel en le reliant à la terre (son potentiel peut être considéré comme invariable). Ce dispositif est connu sous le nom de *cage de Faraday*.

Compte tenu de la loi de Coulomb et du principe de superposition, le potentiel V d'un *conducteur isolé* est proportionnel à sa charge q. On définit la **capacité** C de ce conducteur isolé par la relation :

$$\boxed{q = C V}$$

L'unité SI de capacité est le farad (F); on utilise surtout ses sous-multiples :
- le millifarad (1 mF = 10^{-3} F)
- le microfarad (1 μF = 10^{-6} F)
- le nanofarad (1 nF = 10^{-9} F)
- le picofarad (1 pF = 10^{-12} F).

Exercice. —
1) Déterminer le potentiel d'une sphère de rayon R portant une charge q.
2) En déduire sa capacité.
3) Quelle est la capacité de la Terre, considérée comme un conducteur parfait (R = 6400 km) ?

1) A *l'extérieur* de la sphère, tout se passe comme si q était concentrée au centre O; le potentiel en un point M extérieur (OM = x, x > R) vaut donc

$$V_M = k\frac{q}{x} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 x}$$

On obtient le potentiel *à la surface* par continuité, en faisant tendre M vers cette surface :

$$V_M \to V = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R}$$

V est aussi le potentiel de la sphère, puisque cette dernière est équipotentielle.

2) Puisque q = CV, on a :

$$C = 4\pi \varepsilon_0 R$$

3) Pour la Terre :

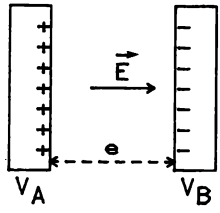
$$C = \frac{1}{9.10^9} \cdot 6{,}4.10^6 = 0{,}7.10^{-3} = 700\ \mu F$$

□ **Condensateurs.** — Considérons le système formé de deux conducteurs A et B initialement neutres; chargeons ces conducteurs au moyen d'un *générateur* qui prélève une charge q sur le conducteur B pour la mettre sur le conducteur A. A la fin de l'opération, le conducteur A possède la charge q et B la charge − q; leurs potentiels, initialement identiques, sont devenus opposés. Le fait d'avoir transféré une charge q d'un conducteur à l'autre a créé une différence de potentiel $V_A - V_B$ qui est proportionnelle à q; on définit ainsi la **capacité** C du système de deux conducteurs :

$$\boxed{q = C(V_A - V_B)}$$

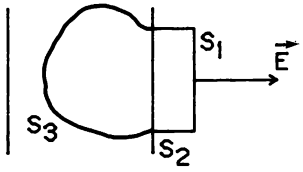
Un tel système de conducteurs en *influence totale* (ils portent toujours des charges opposées) est un **condensateur.**
On obtient ainsi des capacités beaucoup plus grandes qu'avec un conducteur isolé : on ne se sert jamais de la Terre comme condensateur (un condensateur de 700 μF tient aisément au creux de la main !).

❑ **Le condensateur plan.** — Le plus souvent un condensateur est formé de deux *armatures* planes de surface S disposées parallèlement à la distance e. Si e est petit par rapport à la dimension des armatures, on peut considérer que le champ est uniforme entre celles-ci.



On a donc : $V_A - V_B = Ee$ (1)

Déterminons E en nous plaçant *au voisinage* d'une armature :



Soit σ la densité de charges sur l'armature; on prend une surface *fermée* composée de la surface S_1 orthogonale à $\vec{E}$, de la surface latérale S_2 du cylindre s'appuyant sur S_1 dont les génératrices sont parallèles à E et d'une surface S_3 fermant le tout, de forme quelconque, contenue dans l'armature. Si σ est la densité de charges sur l'armature, cette surface fermée contient une charge σS_1; le flux de $\vec{E}$ à travers S_1 vaut $E.S_1$, il est nul à travers S_2 ($\vec{E}$ est parallèle à la surface en chaque point) et aussi à travers S_3 (E est nul dans le conducteur). D'après le *théorème de Gauss* on a

$$E.S_1 = \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0}$$

soit
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

Ce résultat est d'ailleurs valable au voisinage de tout conducteur.
En reportant dans (1) on obtient :

$$V_A - V_B = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$$

ou, en fonction de la charge q de l'armature A :

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

soit $$V_A - V_B = \frac{qe}{S\varepsilon_0}$$

ou $$q = \frac{\varepsilon_0 S}{e}(V_A - V_B)$$

La capacité du condensateur plan est donc :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

On dispose souvent un isolant, ou **diélectrique** entre les deux armatures; tout diélectrique est caractérisé par sa **constante diélectrique** ε_r telle que sa **permittivité** ε soit égale à $\varepsilon_r\varepsilon_0$. ε joue le même rôle dans le diélectrique que ε_0 dans le vide. Dans ce cas la capacité du condensateur devient :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon S}{e} = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

Remarque : ε_r est toujours supérieur à 1. L'introduction d'un diélectrique augmente la capacité du condensateur; la valeur de ε_r est 1 pour l'air sec (à moins de 10^{-3} près), 2,1 pour la paraffine, 4 à 7 pour les verres, 8 pour le mica, 80 pour l'eau (pure). On a obtenu des cristaux pour lesquels ε_r est supérieur à 1000.

□ **Limitation des capacités.** — Pour obtenir des capacités importantes sous un volume restreint, on a intérêt à utiliser un diélectrique à grande constante et à choisir un écartement e des armatures aussi faible que possible. Ce faisant, on augmente E quand le condensateur est chargé sous la *tension* $V(V = V_A - V_B)$:

$$E = \frac{V}{e}$$

Or un diélectrique ne reste isolant que si E n'est pas trop grand, sinon les molécules qui le composent s'ionisent et des électrons peuvent circuler. Il est caractérisé par un champ maximum admissible, ou *champ disruptif* E_m.

En conséquence, un condensateur donné ne fonctionne que si la tension appliquée est inférieure à une valeur maximum $V_m = eE_m$; si $V > V_m$, un courant circule qui détruit en partie le diélectrique : le condensateur est *claqué*. Réciproquement, pour une tension de travail donnée, on ne peut pas diminuer e au-delà d'une valeur minimum e_m telle que $e_m = \frac{V}{E_m}$. Pour obtenir une capacité plus grande il faut augmenter la surface S des armatures : on y arrive sous un faible volume en enroulant une feuille de diélectrique, dont les deux faces sont métallisées, sur elle-même; la capacité obtenue est pratiquement la même que si la feuille était à plat.

Exercice. — *Les armatures d'un condensateur ont une surface de 100 cm².*
1) Le diélectrique utilisé est l'air ($\varepsilon_r = 1$) et on écarte les armatures de 100 microns (1 micron = 1 μm = 10^{-6} m). Quelle est la capacité de ce condensateur ?
2) Le champ disruptif de l'air est 32 kV/cm. Quelle tension maximale peut-on utiliser ?
3) On remplace l'air par du mica ($\varepsilon_r = 8$). Quelle est la nouvelle capacité du condensateur ?
4) Le diélectrique étant du mica, quelle est la capacité maximale possible en respectant la même tension maximale qu'au 2) ? Le champ disruptif du mica est 600 kV/cm.

Rappelons que $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi.10^9} = 8{,}84.10^{-12}$.

1) $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{e} = 8{,}84.10^{-12} \times \dfrac{10^{-2}}{10^{-4}} = 884$ pF

2) $V_m = eE_m = 10^{-4} \times 3{,}2 \times 10^6 = 320$ V
Ne pas oublier de tout exprimer en unités SI :
32 kV/cm = $3{,}2.10^6$ V/m

3) $C_1 = \varepsilon_r.\varepsilon_0 \dfrac{S}{e} = \varepsilon_r C = 8 \times 884.10^{-12} = 7.10^{-9} = 7$ nF

4) L'épaisseur minimale est :

$$e_m = \frac{V_m}{E_m} = \frac{320}{6.10^7} = 5{,}3.10^{-6} \text{ m} = 5{,}3\ \mu\text{m}$$

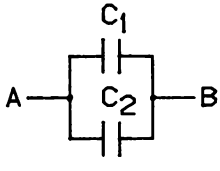
d'où
$$C_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{e} = 8.8{,}84.10^{-12} \cdot \frac{10^{-2}}{5{,}3.10^{-6}} = 130 \text{ nF}$$

On aurait pu écrire :

$$C_2 = C_1 \times \frac{e}{e_m} = 7.10^{-9} \cdot \frac{100}{5{,}3} = 130 \text{ nF}$$

□ **Association de condensateurs.** — Afin de pallier les limitations évoquées ci-dessus, on peut grouper plusieurs condensateurs dont l'ensemble est équivalent à un condensateur unique. On utilise deux types d'association :

1) **en parallèle :**



La tension aux bornes des deux condensateurs est la même; si q_1 et q_2 sont leurs charges on a :

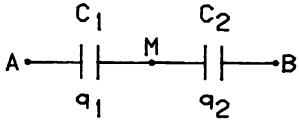
$$V = V_A - V_B = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}$$

$$q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)V$$

L'ensemble est équivalent à un condensateur unique de capacité

$$\boxed{C = C_1 + C_2}$$

2) **en série :**



Remarquons tout d'abord que les deux armatures reliées au point M constituent un *conducteur isolé*. Avant le branchement, elles ne portaient aucune charge, les condensateurs étant déchargés; après le branchement, la *somme des charges qu'elles portent doit donc être nulle* : si $V_A > V_M > V_B$, l'armature du condensateur C_1 porte la charge $-q_1$ et celle de C_2 la charge q_2. On a donc :

$$-q_1 + q_2 = 0 \text{ soit } q_1 = q_2 = q$$

et d'autre part : $V_A - V_M = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q}{C_1}$; $V_M - V_B = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q}{C_2}$

d'où $$V_A - V_B = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

L'ensemble est donc équivalent à un condensateur unique de capacité telle que

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

L'association de condensateurs en parallèle permet d'obtenir de *plus grandes capacités* tandis que celle en série permet de diminuer la tension appliquée à chacun d'entre eux et donc de permettre une *tension maximale plus élevée*.

ELECTROCINETIQUE

CHARGES EN MOUVEMENT DANS UN CONDUCTEUR

☐ **Mobilité des charges.** — Si on applique une différence de potentiel aux extrémités d'un fil conducteur, il va apparaître un champ électrique dans ce dernier; les électrons libres vont se déplacer sous l'action de ce champ, donnant naissance à un *courant électrique*. Le sens conventionnel du courant est celui du déplacement de *charges positives* ayant le même effet : c'est donc le sens *inverse* du déplacement des électrons; on peut sans inconvénient raisonner sur ces hypothétiques charges positives.
Les charges en mouvement dans un conducteur ne sont pas réellement libres; elles sont soumises à une force de «frottement» proportionnelle à leur vitesse $-f\vec{v}$. Ainsi qu'on l'a déjà vu, une charge q atteint rapidement une *vitesse limite* telle que

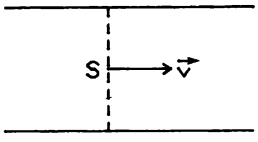
$$q\vec{E} = f\vec{v}$$

soit

$$\boxed{\vec{v} = \frac{q}{f}\vec{E} = k\vec{E}} \qquad (1)$$

où k est la **mobilité** des charges.
La mobilité est caractéristique de chaque conducteur.
On obtient une relation analogue dans les *électrolytes*, où les porteurs de charge sont des *ions* (cations, ions positifs attirés par la *cathode* - l'électrode négative, anions, ions négatifs attirés par l'*anode*); chaque ion est caractérisé par sa mobilité dans l'électrolyte.

☐ **Intensité. Densité de courant.** — Considérons un fil conducteur de section constante S. Si sa longueur est suffisante on peut considérer que le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme; chaque *section droite* est alors une équipotentielle et les charges en mouvement ont une vitesse $\vec{v}$ orthogonale à la section :



Si n est le nombre de porteurs de charges par unité de volume, chaque charge étant e, la quantité d'électricité dq qui traverse la section S pendant le temps dt est :

$$dq = n\,e\,S\,v\,dt$$

On définit **l'intensité** I du courant par

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}} \qquad (2)$$

et on a donc

$$I = n\,e\,S\,v$$

Pour caractériser le courant en chaque point, on utilise la **densité de courant** j :

$$j = \frac{I}{S} = n\,e\,v$$

ou, plus généralement, le **vecteur densité de courant**

$$\boxed{\vec{j} = n\,e\,\vec{v}} \qquad (3)$$

□ **Conductivité - Résistivité.** — Utilisons maintenant la relation (1) :

$$\vec{j} = n\,e\,\vec{v} = n\,e\,k\,\vec{E}$$

ou

$$\boxed{\vec{j} = \gamma\,\vec{E}} \qquad (4)$$

On définit ainsi la **conductivité** $\gamma = n\,e\,k$.

En fait, on utilise surtout la **résistivité** $\rho = \frac{1}{\gamma}$.

□ **Résistance. Loi d'Ohm.** — Dans un fil conducteur à section constante, le champ $\vec{E}$ est uniforme. Si V est la différence de potentiel entre les extrémités du fil de longueur l on a :

$$E = \frac{V}{l}$$

d'où

$$j = \gamma E = \gamma \frac{V}{l}$$

et

$$I = jS = \gamma \frac{V}{l} S$$

On obtient donc :

$$V = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S} I$$

ou

$$V = \rho \frac{l}{S} I \qquad (5)$$

On définit la **résistance** R du fil :

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{S}} \qquad (6)$$

Plus généralement, toute portion d'un circuit électrique est caractérisée par sa résistance; on peut déterminer celle-ci expérimentalement en utilisant la **loi d'Ohm** qui résulte de l'équation (5) :

$$\boxed{V = R\,I} \qquad (7)$$

Remarque : la loi d'Ohm ne s'applique qu'aux portions de circuit comportant des *résistances mortes*; elle ne s'applique pas à des appareils tels qu'une pile, une cuve à électrolyse ou un moteur. On verra plus loin que le seul effet du passage d'un courant dans une résistance morte est un dégagement de chaleur.

□ **Unités électriques.** — Rappelons que les différences de potentiel, ou *tensions*, s'expriment en **volts** et les *champs électriques* en **volts/mètre** ($V.m^{-1}$). Les *charges électriques* étant exprimées en **coulombs** (C), la relation (2) nous indique que les *intensités* s'expriment en coulombs/seconde ou, plus communément, en **ampères** ($1\ A = 1\ C.s^{-1}$). Il s'ensuit que les *densités de courant* ont comme unité l'**ampère/mètre carré** ($A.m^{-2}$).

On utilise la relation (7) pour obtenir l'unité de *résistance*, le volt/ampère ou **ohm** (Ω); la relation (6) indique que les *résistivités* sont exprimées en **ohms mètre** ($\Omega.m$) et les *conductivités* en **ohms^{-1}.mètre^{-1}** ($\Omega^{-1}.m^{-1}$).
Notons enfin qu'on utilise parfois la *conductance* qui est l'inverse de la résistance; elle s'exprime donc en **ohms^{-1}** ou mho.

Exercice. — *La résistivité du cuivre est $1{,}6.10^{-8}\ \Omega.m$; sa masse atomique est 63,6 et sa masse volumique $8{,}8.10^{3}\ kg.m^{-3}$. Son numéro atomique 29 suggère qu'il peut libérer un électron par atome; on supposera qu'il en est bien ainsi dans un conducteur en cuivre.*
1) On dispose d'un fil de cuivre de 1 mm^2 de section et de 1 km de longueur. On applique entre ses deux extrémités une tension de 160 volts. Quel est le courant qui circule ?
2) Calculer la densité de courant.
3) Déterminer la densité d'électrons libres dans le conducteur. En déduire la vitesse de déplacement de ces électrons de conduction.
4) Quelle est la mobilité de ces électrons de conduction ? En quelle unité peut-on l'exprimer ?

1) La résistance du fil est $R = \rho\dfrac{l}{S}$ avec $l = 10^3$ m et $S = 10^{-6}\ m^2$

soit $R = 16\ \Omega$

On en déduit $I = \dfrac{V}{R} = \dfrac{160}{16} = 10\ A$

2) $j = \dfrac{I}{S} = 10\ A/mm^2 = 10^7\ A.m^{-2}$

3) La densité d'électrons libres n est ici égale au nombre d'atomes de cuivre dans un mètre cube

$$n = \frac{8{,}8.10^3}{63{,}6.10^{-3}}.6.10^{23} = 8{,}3.10^{28}$$

Comme $j = n\,e\,v$ on a $v = \dfrac{j}{n\,e}$ avec $e = 1{,}6.10^{-19}$ C

d'où $v = 0{,}75.10^{3}$ m.s^{-1} $= 0{,}75$ mm.s^{-1}

Il s'agit d'une très faible vitesse par rapport à celle due à l'agitation thermique; en fait, c'est une vitesse *moyenne*. Quand il n'y a pas de tension appliquée, la vitesse moyenne est nulle, compte tenu du caractère désordonné de l'agitation thermique.

4) On peut calculer la mobilité k au moyen de la relation

$$\gamma = n\,e\,k = \frac{1}{\rho}$$

d'où $k = (n\,e\,\rho)^{-1} = 4{,}7.10^{-3}$ S.I.

On pouvait aussi se servir de la relation

$$j = n\,e\,k\,E \quad \text{avec } E = \frac{160}{1000} = 0{,}16 \text{ V.m}^{-1}$$

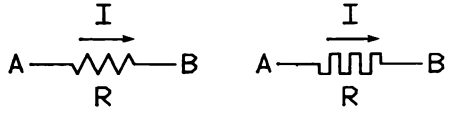
On peut tirer l'unité S.I. de mobilité de cette dernière relation :

$$[k] = L^2.T^{-1}.\text{potentiel}^{-1}$$

soit pour unité : m^2.s^{-1}.V^{-1}. D'autres expressions sont évidemment acceptables.

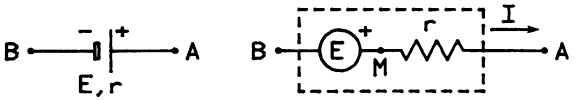
CIRCUITS EN COURANT CONTINU

☐ **Eléments des circuits.** — Nous avons déjà rencontré les *résistances*; leur relation caractéristique est donnée par la *loi d'Ohm :*



$$\boxed{V_A - V_B = RI} \quad (1)$$

Pour alimenter un circuit, il faut utiliser un *générateur* : pile, batterie d'accumulateurs ou dynamo. Un générateur est caractérisé par sa **force électromotrice** E (f.é.m.) exprimée en *volts* : c'est la différence de potentiel entre les bornes du générateur (le *pôle* + ayant un potentiel supérieur au *pôle* −) quand celui-ci ne débite pas; il possède, de plus, une **résistance interne** r. Tout générateur peut être représenté par un *générateur idéal* (résistance interne nulle) mis en série avec la résistance interne :



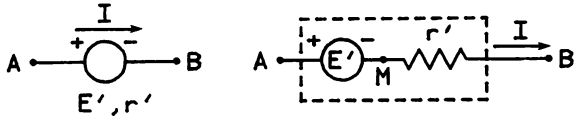
Quand le générateur débite, la tension à ses bornes est

$$V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_B)$$

soit $$\boxed{V_A - V_B = E - rI} \qquad (2)$$

Cette tension est toujours inférieure à la f.é.m.

On utilise enfin des appareils tels qu'un moteur ou une cuve à électrolyse. Ce sont des *récepteurs* qui sont caractérisés, pour un régime de fonctionnement donné, par leur **force contre électromotrice** E' (f.c.é.m.) exprimée en volts : c'est une différence de potentiel, opposée au sens de passage du courant, apparaissant dans le récepteur; il faut, là encore, tenir compte de la *résistance interne* r' :



La différence de potentiel aux bornes d'un récepteur est donc :

$$V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_B)$$

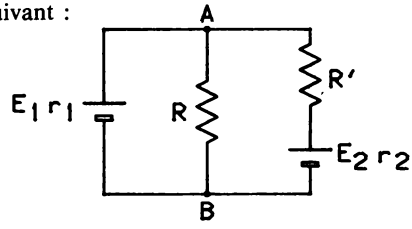
soit $$\boxed{V_A - V_B = E' + r'I} \qquad (3)$$

Elle est toujours supérieure à la f.c.é.m.

Remarque : un générateur monté en *opposition* (courant le traversant du pôle + vers le −) se comporte comme un récepteur; sa f.c.é.m. est généralement égale à sa f.é.m. (E' = E).

□ **Lois de Kirschoff.** — Un réseau électrique est composé de **branches** reliées les unes aux autres; chaque branche contient un, ou plusieurs, élément : générateur, résistance, récepteur. Les points où plusieurs branches sont interconnectées sont appelés **nœuds**.

Dans le réseau suivant :

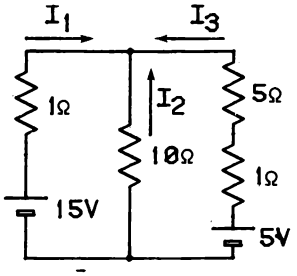


on distingue trois branches : celle du générateur (E_1, r_1), celle de la résistance R et celle du générateur (E_2, r_2) et deux nœuds : les points A et B.
Une **maille** est un circuit *fermé* réalisé en parcourant des branches du réseau.
Le problème général est de déterminer l'intensité du courant qui parcourt chaque branche. Il y a autant d'inconnues que de branches; il faut donc pouvoir écrire un nombre identique d'équations *indépendantes.*
Ceci est possible en utilisant les **lois de Kirschoff** : la *loi de nœuds* et la *loi des mailles.*
Il faut préalablement se donner un sens positif arbitraire pour chaque intensité. Ceci étant fait, la loi des nœuds exprime qu'il ne saurait y avoir accumulation de charges en un point du circuit : toutes les charges arrivant en un point en repartent. On a donc la loi des nœuds :
La somme algébrique des intensités dans les branches connectées à un nœud est nulle.
La loi des mailles résulte de l'additivité des différences de potentiel :
En parcourant complètement une maille, la somme des différences de potentiel rencontrées est nulle.
Ceci est évident puisque les points de départ et d'arrivée sont confondus.

Remarque : si le réseau comporte n nœuds, on peut écrire (n – 1) équations indépendantes avec la loi des nœuds. On trouve les autres équations en appliquant la loi des mailles au nombre nécessaire de mailles différentes. Pour le réseau présenté plus haut on peut écrire une équation en appliquant la loi des nœuds en A ou en B et deux équations en utilisant deux mailles (sur les trois possibles).

Exercice. — *Dans le circuit du paragraphe précédent, déterminer les intensités dans chaque branche. On donne : $E_1 = 15$ V, $r_1 = 1\ \Omega$, $R = 10\ \Omega$, $R' = 5\ \Omega$, $E_2 = 5$ V, $r_2 = 1\ \Omega$.*

Choisissons, par exemple, le sens des courants comme sur la figure :



La loi des nœuds en A donne :

$I_1 + I_2 + I_3 = 0$ (on a compté positivement ce qui arrive en A)

Partant de B, parcourons la maille contenant la branche de gauche puis celle du milieu en écrivant la somme des d.d.p. :

$$15 - I_1 + 10\, I_2 = 0$$

Partant de B, faisons de même en suivant la branche du milieu puis celle de droite :

$$- 10\,I_2 + 5\,I_3 + I_3 - 5 = 0$$

On obtient trois équations :

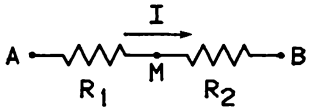
$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\ - I_1 + 10\,I_2 &= - 15 \\ - 10\,I_2 + 6\,I_3 &= 5 \end{aligned}$$

Résolvant ce système par un moyen quelconque (substitution, élimination ou déterminants), on trouve :

$$I_1 = 2{,}5\ \text{A} \qquad I_2 = - 1{,}25\ \text{A} \qquad I_3 = - 1{,}25\ \text{A}$$

Ceci montre que I_1 circule de B vers A, I_2 et I_3 de A vers B.

□ **Association de résistances.** — On trouve souvent deux résistances *en série :*

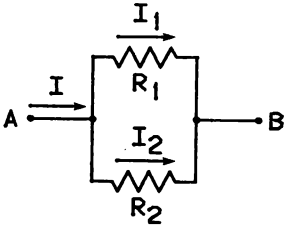


On a : $V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_B) = R_1 I + R_2 I$

$$\boxed{V_A - V_B = (R_1 + R_2)I}$$

Deux résistances R_1 et R_2 en série sont donc équivalentes à une résistance unique $R = R_1 + R_2$.

Pour deux résistances *en parallèle* on a :



$$V_A - V_B = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

$$I = I_1 + I_2 = (V_A - V_B)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

d'où

$$\boxed{V_A - V_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\, I}$$

Deux résistances en parallèle sont équivalentes à une résistance $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.
On dit aussi que leurs *admittances* s'ajoutent : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

☐ **Energie. Loi de Joule.**

Puissance dépensée dans une résistance
Si une résistance R est traversée par un courant I, il se produit un dégagement de chaleur : c'est **l'effet Joule**. L'énergie calorifique W obtenue pendant une durée t est égale à celle perdue par la charge q ayant subit la chute de potentiel V au passage de la résistance :

$$W = qV = It.RI = RI^2t$$

ce qui correspond à une puissance

$$\boxed{P = RI^2}$$ **Loi de Joule.**

Puissance fournie par un générateur
Pendant une durée t, une charge q = It traverse le générateur; elle subit au passage une augmentation de potentiel égale à la f.é.m. E. Le générateur lui fournit l'énergie

$$W = qE = It.E$$

La puissance fournie par le générateur est donc :

$$\boxed{P = EI}$$

Cette puissance est consommée par les récepteurs et par effet Joule (y compris dans la résistance interne).

Puissance consommée par un récepteur
Au passage d'un récepteur, la charge q = It subit une diminution de potentiel égale à la f.c.é.m. E'; elle fournit au récepteur l'énergie :

$$W = qE' = It.E'$$

La puissance transformée en puissance mécanique (moteur) ou chimique (électrolyse) est donc :

$$\boxed{P' = E'I}$$

La puissance *absorbée* par le récepteur est la somme de P' et de la puissance dissipée par effet Joule dans sa résistance interne.

Exercice. — *Dans le réseau de l'exercice précédent, le générateur de la branche de gauche fournit de l'énergie et celui de la branche de droite en consomme (il fonctionne en récepteur).*
1) Calculer les puissances correspondantes.
2) Quelle est la puissance consommée par effet Joule dans tout le réseau ?

3) Quel est le rendement du générateur de la branche de gauche ? Le rendement est le rapport de la puissance utilisable à l'extérieur à celle fournie au total.

On utilise les mêmes notations.
1) Puissance fournie par le générateur à gauche :

$$P_1 = E_1 I_1 = 15 \times 2{,}5 = 37{,}5 \text{ W}$$

Puissance consommée par le générateur à droite (hormis l'effet Joule) :

$$P' = E_2 |I_2| = 5 \times 1{,}25 = 6{,}25 \text{ W}$$

Puissance absorbée par ce générateur en opposition :

$$P_2 = P' + r_2 I_2^2 = 6{,}25 + 1 \times (1{,}25)^2 = 7{,}8 \text{ W}$$

2) Puissance consommée par effet Joule :

$$P_{joule} = r_1 I_1^2 + R I_2^2 + (R' + r_2) I_3^2$$

soit $P_{joule} = (2{,}5)^2 + 10 \times (1{,}25)^2 + 6 \times (1{,}25)^2 = 31{,}25$ W

Remarquons que $P_{joule} = P_1 - P'$.

3) La puissance utilisable par l'extérieur P_u est celle P_1 fournie par le générateur moins celle consommée par effet Joule dans sa résistance interne :

$$P_u = P_1 - r_1 I_1^2$$

Le rendement vaut donc :

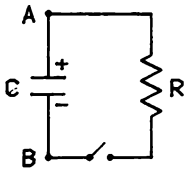
$$R = \frac{P_u}{P_1} = 1 - \frac{r_1 I_1^2}{P_1} = 1 - \frac{(2{,}5)^2}{37{,}5} = 0{,}83$$

Le rendement est toujours inférieur à 1 (malheureusement !).

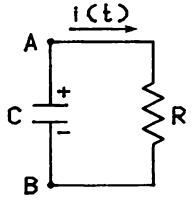
COURANTS VARIABLES

On peut utiliser les mêmes relations que celles vues précédemment à chaque instant pour des courants variables, pourvu que leur vitesse de variation ne soit pas trop grande. Pour un fil conducteur par exemple, une brusque augmentation de potentiel à une extrémité n'est pas répercutée immédiatement à l'autre extrémité; elle se déplace le long du fil à une vitesse proche de celle de la lumière. Si le fil n'est pas trop long, le temps d'établissement du nouveau potentiel est suffisamment court pour n'être pas perceptible et on peut sans inconvénient le considérer comme nul.
Nous n'envisagerons que cette dernière possibilité. Le point important est donc que les lois de Kirschoff ainsi que la loi d'Ohm sont applicables *à chaque instant*.

☐ **Décharge d'un condensateur.**



On charge un condensateur sous la différence de potentiel V_0; on l'insère dans le circuit de la figure et on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Cherchons l'évolution de la tension $v(t) = V_A - V_B$ aux bornes du condensateur pour $t > 0$.



Quelles équations peut-on écrire *à chaque instant t* ?
1) la charge du condensateur est proportionnelle à la tension aux bornes :

$$q(t) = C\, v(t)$$

2) la loi d'ohm s'applique aux bornes de R :

$$V_A - V_B = v(t) = R\, i(t)$$

3) le courant qui circule diminue la charge du condensateur :

$$i(t) = -\frac{dq}{dt}$$

Le signe $-$ provient des conventions pour v et i : si i est positif, q diminue et donc $\frac{dq}{dt}$ est négatif.
En n'oubliant pas que q, i et v sont des fonctions de t, on obtient 3 équations :

$$q = C\, v \qquad (1)$$

$$v = R\, i \qquad (2)$$

$$i = -\frac{dq}{dt} \qquad (3)$$

En dérivant les deux membres de (1) on obtient :

$$\frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} = i$$

puis, en éliminant i entre (2) et (3) :

$$v = -RC\frac{dv}{dt}$$

ou

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0}$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$v = k\, e^{-t/RC}$$

On détermine k grâce à la condition initiale :

$$v(0) = V_0 = k\, e^0 = k$$

d'où

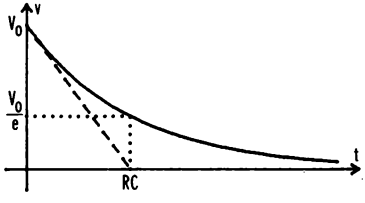
$$\boxed{v(t) = V_0\, e^{-t/RC}}$$

Exercice.

1) Tracer le graphe de v(t).

2) Le terme RC est homogène à un temps : on l'appelle la **constante de temps** *du circuit. Que représente la constante de temps ?*

1)



2) Quand t = RC, on a

$$v = V_0\, e^{-1} = \frac{V_0}{e}$$

La constante de temps est le temps au bout duquel la tension aux bornes du condensateur a été divisée par e.

Remarquer sur le dessin que la constante de temps permet de déterminer la tangente à l'origine.

□ **Energie emmagasinée par un condensateur.** — Quand un condensateur se décharge, il peut fournir de l'énergie à l'extérieur. Déterminons l'énergie fournie à la résistance R dans le circuit précédent : à l'instant t, la puissance dissipée par effet Joule est

$$P(t) = R[i(t)]^2 = R\, i^2$$

Entre les instants t et t + dt, l'énergie dépensée est :

$$dW = P\, dt = R\, i^2\, dt$$

Comme v = R i, on a :

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

et

$$dW = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC} dt$$

Pour toute la décharge, l'énergie dépensée est donc :

$$W = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC} dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt$$

$$W = \frac{V_0^2}{R} \left[-\frac{RC}{1} e^{-2t/RC} \right]_0^\infty$$

soit

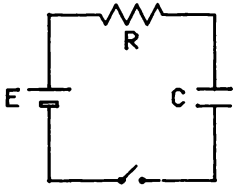
$$W = \frac{1}{2} C V_0^2$$

Cette énergie a été fournie par le condensateur; c'est l'énergie qui y était emmagasinée :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} Q_0 V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}}$$

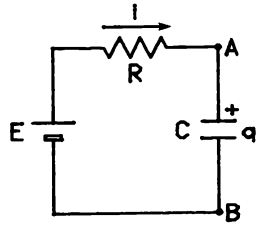
où Q_0 est la charge initiale du condensateur.

□ **Charge d'un condensateur.**



Dans le circuit ci-dessus on suppose que le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur à l'instant t = 0. Que vaut la tension aux bornes du condensateur à un instant t ultérieur ?

Etat du circuit à l'instant t > 0 :



En posant $V_A - V_B = v$, on a :

$$E - R\,i - v = 0$$

$$q = C\,v$$

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{(ici, si } i > 0\text{, q augmente).}$$

En éliminant q et i entre ces trois équations (toujours en dérivant la relation $q = C\,v$), on obtient :

$$E - RC\frac{dv}{dt} - v = 0$$

ou

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{E}{RC}$$

A la solution générale $k\,e^{-t/RC}$ de l'équation sans second membre il faut ajouter une solution particulière de l'équation complète ($v = E$ est une solution évidente); on a :

$$V = k\,e^{-t/RC} + E$$

De la condition initiale on tire :

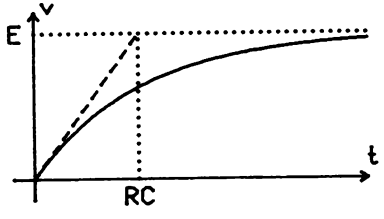
$$v(0) = 0 = k + E \qquad \text{soit} \qquad k = -E$$

et

$$v = E(1 - e^{-t/RC})$$

Exercice.
1) Tracer le graphe de v(t).
2) Au bout de combien de temps v atteint-elle la valeur E à moins de un pour cent près ?

1)



2) On cherche t_1 telle que

$$v = E(1 - \frac{1}{100}) = E(1 - e^{-t_1/RC})$$

soit $e^{-t_1/RC} = \frac{1}{100}$ ou $\frac{t_1}{RC} = \text{Log } 100$

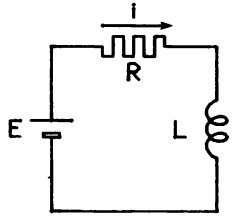
d'où $t_1 = RC.\text{Log } 100 = 4{,}6\ RC$

La valeur finale E de v est donc atteinte à moins de 1 % près au bout de 4,6 fois la constante de temps; ceci nous permet d'évaluer la durée du *régime transitoire*.

□ **Régime transitoire avec une self.** — Une **self** est généralement constituée d'un fil conducteur bobiné; sa principale caractéristique est de développer une tension à ses bornes qui tend à s'*opposer aux variations du courant* qui la parcourt :

$$v = L\frac{di}{dt}$$

L est le **coefficient** de self induction ou self et s'exprime en henrys.
Considérons un circuit comprenant un générateur, une résistance pure (dépourvue de self) et une self en série :



Le circuit a été fermé à l'instant t = 0.
A l'instant t > 0, on a :

$$E - Ri - L\frac{di}{dt} = 0 \qquad \text{(réfléchissez bien aux signes)}$$

soit

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

La solution générale de l'équation est :

$$i = k\, e^{-(R/L)t} + \frac{E}{R}$$

Avec la condition initiale i(0) = 0 (i(t<0) = 0 puisque le circuit est ouvert; la présence de la self interdit toute discontinuité de i à l'instant t = 0), on trouve :

$$\boxed{i = \frac{E}{R}(1 - e^{-(R/L)t})}$$

On obtient quelque chose d'analogue au résultat concernant un condensateur : le régime transitoire est ici caractérisé par une constante de temps égale à $\frac{L}{R}$. Le *régime permanent* est celui où i = constante soit $i = \frac{E}{R}$

CIRCUITS EN COURANT ALTERNATIF

Seul le cas de courants alternatifs sinusoïdaux sera envisagé ici. C'est d'ailleurs le plus important puisque le théorème de Fourier (voir la partie Vibrations) permet de décomposer toute fonction périodique en une somme de fonctions sinusoïdales; le principe de superposition nous autorise à étudier séparément le comportement d'un circuit pour chacune des composantes sinusoïdales puis à composer les résultats pour obtenir le comportement global.

AMPLITUDES ET VALEURS EFFICACES

☐ **Définitions.** — Un courant (ou une tension) sinusoïdal est représenté par une fonction de la forme

$$\boxed{i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)}$$

où I_0 est l'**amplitude**, ω la **pulsation** et φ la **phase** à l'origine des temps.

On utilise aussi la **fréquence** $f = \frac{\omega}{2\pi}$ exprimée en hertz (Hz) ou la **période** $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ exprimée en secondes.

On ne rencontrera ici que des courants de même pulsation; deux courants (ou tensions) ne pourront différer que par leurs amplitudes et leurs phases à l'origine :

$$i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

«L'angle» $\varphi_2 - \varphi_1$ représente le *déphasage* de i_2 par rapport à i_1; si le déphasage est *positif*, i_2 est en *avance de phase* sur i_1, dans le cas contraire, i_2 est en *retard de phase*.
Remarquons enfin qu'une grandeur sinusoïdale a toujours une *valeur moyenne nulle* (c'est celle qu'on mesure avec un voltmètre ou un ampèremètre pour courant continu).

☐ **Effet Joule en courant sinusoïdal.** — Considérons une résistance R parcourue par un courant sinusoïdal $i = I_0 \cos \omega t$ (on ne change rien à la généralité de ce qui suit en prenant $\varphi = 0$).
A chaque instant, la puissance dissipée par effet Joule est :

$$P = Ri^2 = R I_0^2 \cos^2 \omega t$$

L'énergie W obtenue sur un temps de n périodes (nT) vaut n fois celle sur une période W_1 :

$$W_1 = \int_0^T P(t)dt = R I_0^2 \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt$$

Puisque $\cos 2\Theta = 2\cos^2 \Theta - 1$, on a :

$$W_1 = R I_0^2 \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{R I_0^2}{2} \left[t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T$$

soit $$W_1 = \frac{R I_0^2}{2} T$$

et $$W = n W_1 = n \frac{R I_0^2}{2} T$$

La **puissance moyenne** sur les n périodes vaut donc :

$$\boxed{P_m = \frac{W}{nT} = \frac{R I_0^2}{2}}$$

P_m est indépendante de la période si, du moins, on la mesure sur un temps assez long.

□ **Intensité et tension efficaces.** — L'expression précédente présente quelqu'analogie avec celle de l'effet Joule en courant continu. Pour rendre cette analogie complète, cherchons quel *courant continu* I_e fournirait à R la même puissance :

$$P_m = R I_e^2 = R \frac{I_0^2}{2}$$

soit $$I_e^2 = \frac{I_0^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}}$$

I_e est l'**intensité efficace** du courant.
On définit de même la **tension efficace** V_e aux bornes de R :

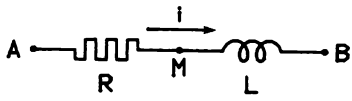
$$\boxed{V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}}}$$

Ainsi, la loi d'Ohm s'applique *aux bornes d'une résistance* en utilisant les grandeurs efficaces :

$$\boxed{V_e = R I_e}$$

MISE EN EQUATIONS DES CIRCUITS

☐ **Circuit avec résistance et self en série.**



Comme au chapitre précédent, nous admettons que les lois de Kirschoff sont valables *à chaque instant*.
Supposons que A et B sont reliés aux bornes d'un générateur sinusoïdal :

$$V_A - V_B = v = V_0 \cos \omega t$$

On cherche l'intensité i(t) qui circule dans le circuit.
On a :

$$V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_B)$$

avec $V_A - V_M = Ri$ et $V_M - V_B = L\dfrac{di}{dt}$

soit $$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 \cos \omega t$$

L'équation sans second membre a été résolue au chapitre précédent; sa solution est $i_1 = k\, e^{-(R/L)t}$
Pour trouver une solution particulière de l'équation complète cherchons une fonction sinusoïdale de la forme :

$$i_2 = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

d'où $$\frac{di_2}{dt} = -\omega I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

En remplaçant dans l'équation :

$$R I_0 \cos(\omega t + \varphi) - L \omega I_0 \sin(\omega t + \varphi) = V_0 \cos \omega t$$

soit, en développant :

$$R I_0(\cos\omega t - \sin\omega t \sin\varphi) - L\omega I_0(\sin\omega t \cos\varphi + \cos\omega t \sin\varphi) = V_0 \cos\omega t$$

et en regroupant les termes :

$$(R\cos\varphi - L\omega\sin\varphi)I_0 \cos\omega t - (R\sin\varphi + L\omega\cos\varphi)I_0 \sin\omega t = V_0 \cos\omega t$$

Le coefficient de sin ωt doit être nul :

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{L\omega}{R}$$

et celui de cos ωt doit être le même dans les deux membres :

$$(R\cos\varphi - L\omega\sin\varphi)I_0 = V_0$$

soit, puisque $\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$ et $\sin\varphi = \frac{-L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$$

Au total, le courant i(t) est :

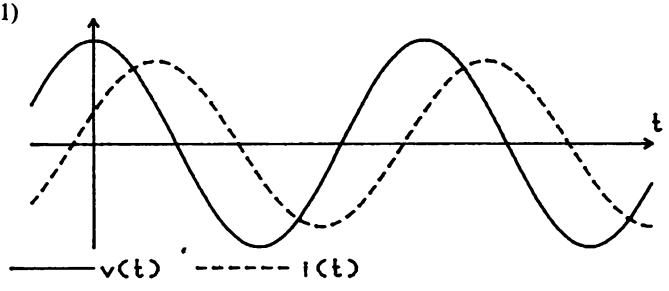
$$i = i_1 + i_2 = k\, e^{-(R/L)t} + \frac{V_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\cos(\omega t+\varphi)$$

La valeur de k dépend des conditions initiales; toutefois pour t assez grand par rapport à $\frac{L}{R}$, le premier terme devient négligeable (voir le chapitre précédent) et il ne reste plus que le terme sinusoïdal.
En *régime permanent*, le courant est donné par :

$$\boxed{i = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\cos(\omega t+\varphi) \qquad \text{avec } \operatorname{tg}\varphi = -\frac{L\omega}{R}}$$

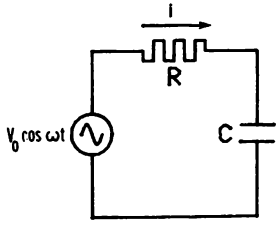
Exercice.
1) Représenter v(t) et i(t) sur un même graphique. C'est ce qu'on verrait sur un oscilloscope dont une voie mesurerait la tension entre A et B et l'autre la tension aux bornes de R.
2) i est-il en avance ou en retard de phase sur v ?

1)



2) φ est négatif, i est donc en *retard* de phase sur v. Regardez sur le graphique : i atteint son maximum *après* v.

☐ **Circuit avec résistance et condensateur en série.**



Si q est la charge du condensateur, la tension à ses bornes est $\frac{q}{C}$.

Le circuit est donc représenté par l'équation :

$$V_0 \cos \omega t - R\,i - \frac{q}{C} = 0$$

ou

$$R\,i + \frac{q}{C} = V_0 \cos \omega t$$

Cherchons i(t) dans le *régime permanent* :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Comme $i = \frac{dq}{dt}$, $q = \int i\,dt = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$

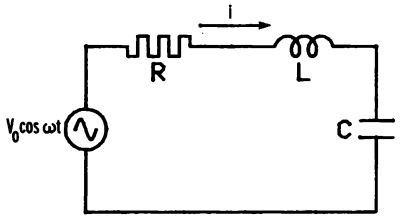
Parmi les primitives on a choisi celle qui est sinusoïdale (constante d'intégration nulle) : la valeur de la charge doit osciller symétriquement autour de 0. En remplaçant dans l'équation et en procédant comme au paragraphe précédent, on obtient :

$$i = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec tg } \varphi = \frac{1}{RC\,\omega}$$

On peut tracer un graphique analogue à celui du circuit avec une self; cette fois, l'intensité est en *avance de phase* sur la tension.

Le terme $\frac{1}{C\omega}$ est homogène à une résistance et on peut l'exprimer en ohms; c'est la **réactance capacitive** du circuit. Dans le circuit précédent, $L\omega$ pouvait aussi être exprimé en ohms; c'était une **réactance inductive**.

☐ **Un circuit résonant : R, L et C en série.**



Avec les mêmes notations que précédemment, l'équation représentant le circuit est :

$$R\,i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V_0 \cos \omega t$$

On ne cherche à déterminer que le régime permanent :

$$i = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Avec la même méthode de résolution, on obtient :

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \qquad \text{tg } \varphi = (\frac{1}{C\omega} - L\omega)\frac{1}{R}$$

Si V_0, R, L et C sont fixés, l'amplitude I_0 du courant est maximale quand

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

soit

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ce qui représente la **pulsation de résonance** ω_0 de ce circuit. On définit la *fréquence de résonance*

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

A la résonance, $I_0 = \frac{V_0}{R}$ et tg $\varphi = 0$: tout se passe comme si le circuit ne comportait que la résistance.

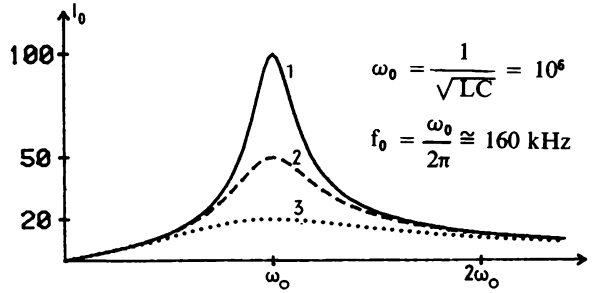
Exercice.

1) On donne L = 1 mH, C = 1 mF et V_0 = 100 V. Représenter graphiquement I_0 en fonction de ω pour R = 1Ω, R = 2Ω et R = 5Ω.

2) Quelle est l'amplitude de la tension aux bornes de la self à la résonance ?

3) On appelle **coefficient de surtension** *(ou facteur de qualité) la quantité $Q = \frac{L\omega_0}{R}$. Que représente-t-il ?*

1)



1) R = 1Ω 2) R = 2Ω 3) R = 5Ω

2) La tension v aux bornes de L est :

$$v = L\frac{di}{dt} = -L\,\omega\,I_0\sin(\omega t+\varphi)$$

Son amplitude est donc :

$$V_L = L\,\omega\,I_0 = \frac{L\,\omega_0}{R}\,.\,V_0 \qquad \text{à la résonance.}$$

3) Q est le rapport $\frac{V_L}{V_0}$ à la résonance. Plus R est petit, plus Q est grand ce qui correspond à un «pic» de courant plus haut et plus étroit. Ici les valeurs de Q sont de 1000 (R = 1Ω), 500 (R = 2Ω) et 200 (R = 5Ω). Un circuit résonant utilisé pour sélectionner un émetteur de radio possède une valeur de Q de l'ordre de quelques centaines; dans les hyperfréquences (de l'ordre de plusieurs gigahertz, 1 GHz = 10^9 Hz) on utilise des cavités résonantes pour lesquelles Q peut atteindre une valeur de l'ordre de 10^5.

UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES

□ **Représentation d'une tension ou d'un courant.** — Dans un réseau en alternatif, les courants dans toutes les branches oscillent avec la même pulsation ω; il suffit donc de connaître deux grandeurs, son amplitude et sa phase pour t = 0, pour qu'une intensité donnée soit déterminée.
Soit le courant

$$i = I_0\cos(\omega t+\varphi)$$

On peut considérer cette fonction comme la **partie réelle** du nombre complexe $I_0[\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)]$ - les électriciens ont pour habitude de noter j l'unité imaginaire ($j^2 = -1$), sans doute pour ne pas confondre avec la notation habituelle d'un courant. Sous forme exponentielle ce nombre complexe s'écrit $I_0\,e^{j(\omega t+\varphi)} = I_0\,e^{j\omega t}\,e^{j\varphi}$; comme seuls sont utiles I_0 et φ, on peut *représenter* un courant $i = I_0\cos(\omega t+\varphi)$ par le nombre complexe $I_0\,e^{j\varphi}$.

Il en est, bien entendu, de même pour une tension sinusoïdale.
Pour écrire les équations concernant un réseau on a essentiellement à faire des *sommes* de courants ou de tension. Si deux courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont

représentés par les nombres complexes $I_1 e^{j\varphi_1}$ et $I_2 e^{j\varphi_2}$, leur somme est représentée par la somme des deux nombres complexes :

$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ est représenté par $I_1 e^{j\varphi_1} + I_2 e^{j\varphi_2}$.
En résumé, si un courant est représenté par le complexe $x + j\,y$, son intensité en fonction du temps i(t) est donnée par la partie réelle de $(x + j\,y)e^{j\omega t}$; si $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ on a les relations

$$I_0 = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

□ **Notion d'impédance.** — Dans la suite on notera v ou i l'expression en fonction du temps d'une tension ou d'un courant, [v] ou [i] leur complexe associé.
D'une façon générale, la relation entre la tension aux bornes d'une branche de circuit et l'intensité qui y circule a, en notation complexe, la forme :

$$\boxed{[v] = z[i]}$$

où z est l'**impédance** de la branche; z est, bien sûr, un nombre complexe.

Cas d'une résistance
De la loi d'Ohm $v = R\,i$ on tire :

$$[v] = R[i]$$

L'impédance de la résistance est R.

Cas d'une self
Aux bornes d'une self on a $v = L\dfrac{di}{dt}$ soit, si $i = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$:

$$v = -L\omega I_0 \sin(\omega t + \varphi) = L\omega I_0 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

d'où $$[v] = L\omega I_0 e^{j(\varphi + \pi/2)} = L\omega I_0\, j\, e^{j\varphi} \qquad (e^{j\pi/2} = j)$$

soit $$[v] = j\,L\omega[i]$$

L'impédance d'une self est $j\,L\omega$.

Cas d'un condensateur

On a $v = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$, d'où :

$$v = \frac{1}{C\omega} I_0 \sin(\omega t + \varphi) = \frac{I_0}{C\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

d'où $$[v] = \frac{-j}{C\omega}[i] = \frac{1}{j\,C\omega}[i]$$

L'impédance d'un condensateur est $\dfrac{1}{j\,C\omega} = \dfrac{-j}{C\omega}$

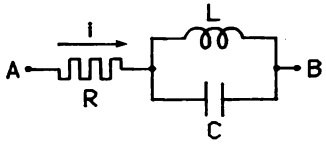
Association d'impédances
Les impédances obéissent aux mêmes règles que les résistances en courant continu :

deux éléments d'impédances z_1 et z_2 associés en série sont équivalents à un élément d'impédance $z_1 + z_2$; associés en parallèle, on peut les remplacer par un élément d'impédance z telle que $\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ $\left(z = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}\right)$

On utilise parfois l'**admittance** $y = \frac{1}{z}$ les admittances de deux éléments en parallèle s'ajoutent.

Remarque : l'impédance z est parfois appelée *impédance complexe* par opposition à l'*impédance réelle* Z qui est le module de z : Z = |z|. Quand le terme d'impédance est employé seul, il faut se référer au contexte pour savoir s'il s'agit de l'impédance réelle ou complexe.

Exercice. — *Le circuit représenté sur la figure est alimenté par une tension sinusoïdale :* $V_A - V_B = V_0 \cos \omega t$



1) Déterminer l'impédance de ce circuit.
2) Comment se comporte ce circuit pour la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
3) Que devient l'impédance quand $\omega \to 0$ *et quand* $\omega \to \infty$ *? En déduire un usage de ce circuit.*

1) $z = R + \frac{j L\omega(1/jC\omega)}{j L\omega - \frac{j}{C\omega}} = R - \frac{j(L/C)}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} = R - j \frac{L\omega}{L C\omega^2 - 1}$

2) si $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la partie imaginaire de z devient infinie et |z| = Z le devient aussi.
Comme [v] = z[i], [i] est nul et i(t) aussi.
Pour la pulsation ω_0, aucun courant ne passe.

3) Quand ω tend vers 0 ou vers l'infini, la partie imaginaire de z tend vers 0 et z tend vers R : aux petites et aux grandes pulsations (ou fréquences) tout se passe comme s'il n'y avait que la résistance R.
Ce circuit est un *circuit bouchon* : on peut l'utiliser par exemple pour éliminer des courants parasites ayant la pulsation ω_0 sans perturber le fonctionnement en continu.

☐ **Puissance en courant alternatif.** — Rappelons que la puissance moyenne dissipée dans une résistance R est $P_m = \frac{1}{2} R I_0^2$ $[i = I_0 \cos(\omega t + \varphi)]$;

en fonction des valeurs efficaces de la tension et du courant on a :

$$P_m = R I_e^2 = \frac{V_e^2}{R} \quad ; \quad V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad ; \quad V_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Pour de nombreuses sources alternatives on ne mentionne que la tension efficace. Pour le secteur, 220 volts est la tension efficace disponible entre les bornes d'une prise de courant; la tension a, en fait, une amplitude de $220\sqrt{2} = 311$ volts et en fonction du temps elle vaut 311 cos(314 t) - sa fréquence est normalement de 50 hertz.
La puissance moyenne dissipée par un condensateur ou une self est nulle; ces deux éléments emmagasinent de l'énergie sous forme électrostatique ou magnétique pendant une demi-période et la restituent pendant la demi-période suivante.
La puissance dissipée par un circuit quelconque est

$$P_m = V_e I_e \cos \varphi$$

où V_e et I_e sont la tension et le courant efficaces à ses bornes et φ est le déphasage du courant par rapport à la tension.

Exercice. — *Une lampe à incandescence (résistance R, self négligeable) consomme 55 watts quand elle est branchée sur le secteur 110 volts. Quelle self faut-il mettre en série avec elle pour qu'elle fonctionne dans les mêmes conditions quand on branche l'ensemble sur le secteur 220 volts ?*

On peut calculer R : $\frac{110^2}{R} = 55$ soit $R = 220\ \Omega$.
L'impédance réelle de l'ensemble lampe + self est $\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$; le courant efficace I_e est donc, dans le deuxième cas, $\frac{220}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$; la puissance dissipée doit être là aussi de 55 watts soit :

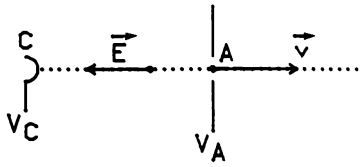
$$55 = R I_e^2 = \frac{220 \times 220^2}{220^2 + L^2\omega^2}$$

On en tire que $L\omega = 220\sqrt{3}$ et $L = \frac{220\sqrt{3}}{100\pi}$ (la fréquence du secteur est 50 Hz). Au total L = 1,2 H.
On aurait aussi pu mettre une résidence de 220 Ω à la place de la self, ce qui aurait entraîné une consommation *totale* de 110 watts. Avec la self, seule la lampe dissipe de l'énergie.

DYNAMIQUE
DES PARTICULES CHARGEES
MAGNETISME

FORCES ELECTROSTATIQUES SUR DES CHARGES EN MOUVEMENT

☐ **Effet d'un champ électrique longitudinal.** — Pour obtenir un faisceau d'électrons ayant tous sensiblement la même vitesse on utilise souvent un champ électrique accélérateur. Par exemple, dans un oscilloscope (ou dans un téléviseur), les électrons extraits de la cathode (électrode négative) par chauffage sont accélérés par le champ électrique résultant de la présence d'une anode (électrode positive); si celle-ci est percée d'un trou, on obtient un faisceau d'électrons *monocinétiques*. Ce dispositif est un *canon à électrons*.



Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à un électron du faisceau; l'électron quitte C avec une vitesse nulle et il atteint la vitesse v en A :

$$\frac{1}{2}m\,v^2 = \int_{\widehat{CA}} -e\,\vec{E}.\vec{dl} = -e\int_{\widehat{CA}} \vec{E}.\vec{dl} = -e(V_C - V_A)$$

ou

$$\boxed{\frac{1}{2}m\,v^2 = e(V_A - V_C)}$$

m et $-e$ étant respectivement la masse et la charge de l'électron.
L'énergie cinétique de chaque électron du faisceau est proportionnelle à la *tension accélératrice* $V_A - V_C$; si on l'exprime en *électron-volts*, sa mesure est la même que celle de cette dernière.
La même méthode est applicable pour obtenir un faisceau de particules négatives (ions H^-, etc) ou positives (protons, particules α); dans ce dernier cas, la tension accélératrice doit être négative.

Exercice.
1) Quelle est la vitesse d'un électron de 1 keV ? ($m = 9{,}1.10^{-31}$ kg)
2) Même question pour un proton de 1 MeV ? ($m = 1{,}7.10^{-27}$ kg)

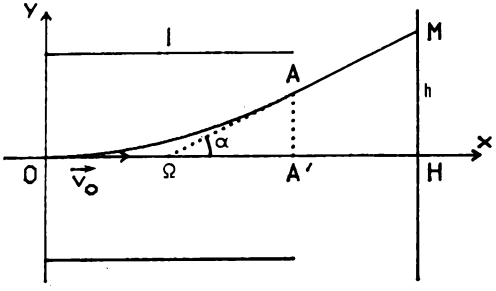
On a toujours $E_C = \frac{1}{2}m\,v^2$ d'où $v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}}$.

D'autre part, 1 MeV = 10^6 eV = $10^6.1{,}6.10^{-19}$ = $1{,}6.10^{-13}$ J
1 keV = 10^3 eV = $1{,}6.10^{-16}$ J

1) $v_e = 1{,}9.10^7$ m/s

2) $v_p = 1{,}4.10^7$ m/s.
Dans les deux cas on obtient une vitesse atteignant environ 5 % de celle de la lumière ($c = 3.10^8$ m/s); une correction relativiste n'est pas absolument nécessaire. Rappelons que la masse augmente avec la vitesse ce qui ne rend plus le théorème de l'énergie cinétique applicable sous la forme que nous avons utilisée.

□ **Effet d'un champ électrique transversal.** — Considérons un électron qui pénètre dans le champ électrique créé par deux plaques parallèles, distantes de d, dont la différence de potentiel est V (sur la figure, l'armature supérieure a le plus grand potentiel) avec la vitesse v_0.



Entre les armatures, le champ électrique est $\vec{E}(0, -\frac{V}{d})$; si on néglige son poids, l'électron subit la force $\vec{F} = -e\vec{E}(0, e\frac{V}{d})$.

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = e\frac{V}{d}$$

d'où, compte-tenu des conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v_0}$:

$$x = v_0 t \qquad y = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{V}{d}t^2$$

En éliminant t on trouve la trajectoire :

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{V}{d}\frac{x^2}{v_0^2}}$$

équation d'une *parabole*

Arrivé en A, l'électron subit une force nulle : il continue donc en ligne droite.

La pente de cette droite est donnée par

$$\text{tg}\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{e\,V\,x}{m\,d\,v_0^2}$$

Remarquons que $\text{tg}\alpha = \dfrac{y_A}{\left(\frac{e}{2}\right)}$: la droite AM passe par $\Omega\left(\frac{l}{2},0\right)$.

Ce dispositif est employé dans les tubes cathodiques (oscilloscopes, téléviseurs); un écran est donc disposé à la distance L = ΩM de Ω. Le point d'impact M est caractérisé par la distance $HM = h = L\,\text{tg}\,\alpha = L\dfrac{e\,V\,l}{m\,d\,v_0^2}$

Cette déviation est directement proportionnelle à V; on peut ainsi déplacer le point M à volonté dans la direction verticale. Si une deuxième paire d'armatures était disposée *verticalement* on pourrait de même commander le déplacement horizontal de M.

Inversement, ce dispositif a été utilisé pour déterminer le rapport $\dfrac{e}{m}$, puisque tous les autres paramètres peuvent être fixés.

FORCE MAGNETIQUE SUR UNE CHARGE EN MOUVEMENT

En plus des forces électrostatiques, une charge électrique en mouvement peut subir une force *magnétique* due à la présence d'autres charges en mouvement (courant dans un circuit ou aimant permanent). L'interaction magnétique est caractérisée par un champ magnétique $\vec{B}$ en chaque point de l'espace; l'unité de champ magnétique est le weber/mètre^2 (wb.m^{-2}).

☐ **Effet d'un champ magnétique.** — Une charge q en mouvement dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit la force :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

où $\vec{v}$ désigne la vitesse de la charge.

$\vec{F}$ est orthogonal à $\vec{v}$ en chaque point de la trajectoire si bien que le travail de $\vec{F}$ est nul. En conséquence, si le point n'est soumis qu'au champ d'induction magnétique, le *module de sa vitesse reste constant*.

☐ **Les trajectoires possibles.**

Trajectoire plane

Si, à un instant donné, la vitesse $\vec{v}$ de la particule chargée M est orthogonale à $\vec{B}$, la force $\vec{F}$, qui est orthogonale aux deux, se trouve dans le plan contenant la particule et orthogonal à $\vec{B}$; ce plan est donc fixe et *le mouvement*

ultérieure est plan; par suite, les trois vecteurs $\vec{F}$, $\vec{v}$ et $\vec{B}$ restent deux à deux orthogonaux et le module de $\vec{F}$, qui vaut alors q v B, est constant. Le point M est donc soumis à une force normale constante en module et sa vitesse est uniforme : son mouvement est **circulaire uniforme**. Le rayon du cercle décrit est donné par :

$$m\frac{v^2}{R} = F = q\,v\,B$$

d'où

$$\boxed{R = \frac{m\,v}{q\,B}}$$

R dépend essentiellement du rapport de la masse à la charge de la particule; comparer avec la déviation par un champ électrique.

Trajectoire non plane

Si $\vec{v}$ n'est pas orthogonal à $\vec{B}$, on obtient une hélice dont l'axe est parallèle à $\vec{B}$. En particulier, si $\vec{v}$ est parallèle à $\vec{B}$, la trajectoire est une droite et $\vec{B}$ n'a aucune influence sur le mouvement.

Exercice. — *Reprendre le dispositif de déviation par un champ électrique. On ajoute un champ magnétique perpendiculaire au plan de la figure $\vec{B}(0,0,B)$; on a choisi un troisième axe Oz tel que le trièdre (Oxyz) soit direct.*

On envoie des ions de charge q qui arrivent avec la vitesse v_0; montrer qu'en choisissant judicieusement B, l'ion peut n'être pas dévié.

Dans le repère Oxyz on a :

$$\vec{v_0}(v_0,0,0) \qquad \vec{F_e} = q\vec{E}\left(0,q\frac{V}{d},0\right) \qquad \vec{F_m} = q\,\vec{v_0} \wedge \vec{B}\ (0,-q\,Bv_0\ ,0)$$

L'ion n'est pas dévié si $\vec{F_e} + \vec{F_m} = \vec{o}$ soit :

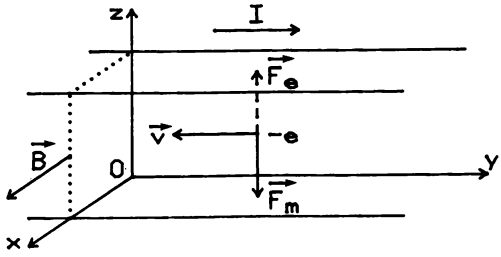
$$q\frac{V}{d} - q\,B\,v_0 = 0$$

ou

$$B = \frac{V}{dv_0}$$

Dans un dispositif donné (B, V et d fixés), seuls les ions de vitesse $v_0 = \frac{V}{dB}$ ne sont pas déviés, ceci indépendamment de leur charge et de leur masse. C'est le principe d'un *filtre de vitesses* qui permet d'obtenir un faisceau d'ions *homocinétique*. On peut, en particulier, utiliser ce dispositif dans un *spectrographe de masse* où des ions de masses différentes peuvent être séparés par un champ électrique et un champ magnétique à condition d'être bien tous animés de la même vitesse initiale.

□ **L'effet Hall.** — Considérons un conducteur plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ et parcouru par un courant I; les porteurs de charge subissent donc une force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ et vont donc être déviés de leur trajectoire initiale. Plaçons-nous dans le cas particulier suivant : dans le repère orthonormé direct Oxyz, le courant circule parallèlement à Oy dans le sens positif et $\vec{B}$ est parallèle à Ox, $\vec{B}(B,0,0)$.



En fait, les porteurs de charge sont des électrons (charge − e) qui circulent dans le sens des y négatifs. Ils subissent donc la force $\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ soit $\vec{F}_m(0, 0, -e\ v\ B)$ et sont entraînés vers le bas; ne pouvant pas sortir du conducteur, ils s'accumulent sur sa surface *inférieure* de sorte que celle-ci possède un *excès de charges négatives* tandis que la face supérieure porte un excès de charges positives (le conducteur reste toujours neutre électriquement); ceci donne naissance à un *champ électrique* $\vec{E}$ dirigé vers le bas qui entraîne l'existence d'une force $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ *dirigé vers le haut* sur chaque électron à l'intérieur du conducteur. En résumé, l'application du champ magnétique entraîne une accumulation de charges négatives sur la face inférieure du conducteur et de charges positives sur la face supérieure ce qui, à son tour, entraîne l'apparition d'une force électrostatique s'opposant à la force magnétique; au bout d'un certain temps ces deux forces s'équilibrent et on obtient un régime permanent où les électrons circulent horizontalement à *l'intérieur* du conducteur ($\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$) et où les faces supérieure et inférieure portent des charges opposées.

La différence de potentiel entre les faces supérieure et inférieure (appelée **différence de potentiel de Hall**, du nom de celui qui la découvrit en 1879) est donc positive dans le cas décrit; si les porteurs de charge avaient été positifs elle serait négative. **L'effet Hall** nous renseigne donc sur le signe des porteurs de charge; quand l'équilibre est atteint on a :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$$

soit $eE = e\ v\ B = 0$ ($\vec{E}$ est dirigé vers le bas : $E_z = -E$)

ou, en valeur absolue

$$E = v\ B$$

En fonction de la densité de courant j, on trouve :

$$j = n\,e\,v$$

et

$$E = \left(\frac{1}{n\,e}\right) j\,B$$

ou, pour le fil conducteur de la figure (section S, hauteur h) :

$$E = \left(\frac{1}{n\,e}\right)\frac{I\,B}{S}$$

et

$$\frac{V}{h} = \left(\frac{1}{n\,e}\right)\frac{I\,B}{S}$$

soit

$$\boxed{V = \left(\frac{1}{n\,e}\right)\frac{I\,B}{S}\,h}$$

où V est la différence potentiel de Hall et $\frac{1}{n\,e}$ est **le coefficient de Hall.**

La détermination expérimentale du coefficient de Hall permit, entre autre, de trouver la densité de porteurs de charge n; on a, pour beaucoup de métaux, environ un électron de conduction par atome.

LE CHAMP MAGNETIQUE

☐ **Champ créé par des charges en mouvement.** — Le champ $\vec{B}$ créé en un point M par une charge q en O se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est donné par la *loi de Biot et Savart.*

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\,q}{4\pi\,r^2}(\vec{v} \wedge \vec{u})}$$

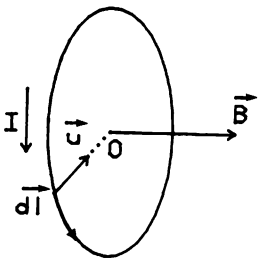
où μ_0 est la **perméabilité du vide,** définie par la relation $\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1$ (c est la vitesse de la lumière dans le vide) et dont la valeur est $4\pi.10^{-7}$ (SI), r est la distance OM et $\vec{u}$ un vecteur unitaire tel que $\vec{OM} = r\,\vec{u}$.

De même, le champ $d\vec{B}$ créé en M par un élément de courant $I\,\vec{dl} = \vec{j}\,S\,dl$ placé en O (charges en mouvement contenues dans le volume élémentaire S dl) vaut :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\,I}{4\pi\,r^2}(\vec{dl} \wedge \vec{u})$$

☐ **Champ créé par des circuits.** — De manière générale, on peut calculer le champ créé par un circuit en sommant les champs élémentaires tels qu'ils sont donnés par la relation précédente.

Spire de courant



Tous les champs élémentaires créés en O sont colinéaires; en module on a donc :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} dl$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int_{un\ tour} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \cdot 2\pi R$$

ou

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

Remarquons que le sens de $\vec{B}$ peut être trouvé aisément par la règle du tire-bouchon.

Une *bobine plate*, formée de N spires concentriques et d'épaisseur négligeable par rapport au rayon R crée en son centre un champ

$$\boxed{B = N\frac{\mu_0 I}{2R}}$$

• **Solénoïde**

Nous n'envisageons ici qu'une bobine formée de N spires coaxiales et de même rayon R ayant une longueur L grande par rapport à R (L >> R); le calcul de l'induction au *centre* de la bobine donne :

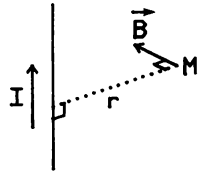
$$\boxed{B = N\frac{\mu_0 I}{L}}$$

$\vec{B}$ étant là aussi porté par l'axe. En utilisant le nombre de spires par unité de longueur $n = \frac{N}{L}$, on a

$$\boxed{B = n\,\mu_0 I}$$

L'expérience montre que B reste sensiblement constant à *l'intérieur* du solénoïde ce qui fait que l'expression trouvée est valable avec une bonne approximation même dans le cas d'un solénoïde réel.

• **Courant rectiligne**



La longueur du conducteur rectiligne étant supposée infinie, le champ $\vec{B}$ en M est donné par

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

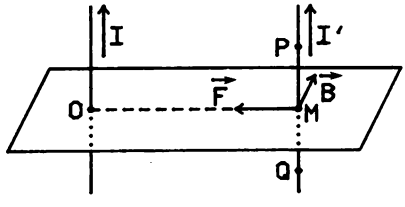
FORCE MAGNETIQUE SUR UN COURANT

☐ **Loi de Laplace.** — Appliquée à un élément de courant $I\,\vec{dl}$, la relation $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ conduit à :

$$d\vec{F} = I\,(\vec{dl} \wedge \vec{B}) \qquad \text{Loi de Laplace}$$

La détermination de la force qui s'exerce sur un courant non infinitésimal se fait par intégration de cette relation.

☐ **Interaction de deux courants parallèles.** —



Posons PQ = l et OM = a; en chaque point du courant I' s'exerce le champ $\vec{B}$ créé par le courant I :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

La force qui s'exerce sur la portion PQ est donc :

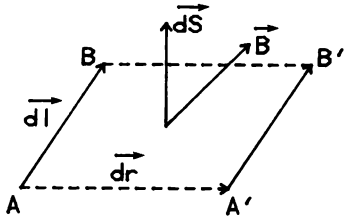
$$F = I' l B$$

ou

$$F = \frac{\mu_0 II'l}{2\pi a}$$

Remarque : quand I = I' = 1A et a = l = 1m, on a F = 2.10^{-7} N. La définition légale de l'ampère repose sur cette relation.

□ **Travail des forces magnétiques.** — Un élément de courant $I\,\vec{dl}$ plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit la force $d\vec{F}_m = I(\vec{dl} \wedge \vec{B})$:



Le travail $d\vec{F}_m$ lors du déplacement $\vec{dr}$ est :

$$\Delta W = d\vec{F}_m.\vec{dr} = I(\vec{dl} \wedge \vec{B}).\vec{dr}$$

ou, compte-tenu des propriétés du produit mixte :

$$\Delta W = I(\vec{dr} \wedge \vec{dl}).\vec{B}$$

Posons $\Delta\vec{S} = \vec{dr} \wedge \vec{dl}$; ce vecteur représente la surface du parallélogramme ABB'A' : $\Delta S = ||\Delta\vec{S}||$ est égale à l'aire de ce parallélogramme et la direction de $\Delta\vec{S}$ est normale à la surface. On a donc

$$\boxed{\Delta W = I\,\Delta\vec{S}.\vec{B} = I\,\Delta\Phi}$$

Le travail élémentaire de la force magnétique est égal au produit de I par le **flux** de $\vec{B}$ à travers la surface balayée.

Le flux est mesuré en wébers (Wb) c'est pourquoi le champ est exprimé en wébers.mètre^{-2} (Wb.m^{-2}).

Appliquée à un *circuit*, cette relation montre que le travail des forces magnétiques est égal à la *variation* du flux de $\vec{B}$ *à travers le circuit* (théorème de Maxwell).

Exercice. — *Une bobine plate comportant N = 100 spires de rayon R = 10 cm est parcourue par un courant I = 10 A; une seconde bobine de n = 10 spires de rayon r = 1 cm, parcourue par un courant i = 5 A, est disposée au centre de la première. Initialement les faces nord des deux bobines sont du même côté. Quelle énergie faut-il fournir pour retourner la bobine intérieure ?*

La bobine intérieure est assez petite pour qu'on puisse considérer le champ créé par l'autre bobine comme uniforme. Si $\vec{B}$ est le champ au milieu de la bobine, son flux initial à travers la petite bobine vaut :

$$\Phi_i = n\, B.\pi\, r^2 \qquad \text{(il y a n spires)}$$

$$\Phi_i = n(N\frac{\mu_0\, I}{2R})\pi\, r^2$$

Le flux final, après retournement, est :

$$\Phi_f = -\Phi_i$$

(le vecteur représentant la surface a changé de sens).
Le travail de *la force magnétique* est donc :

$$W_m = i(\Phi_f - \Phi_i) = -2i\,\Phi_i = -i.\frac{N\,\mu_0\, I}{R}.n\,\pi\, r^2$$

Ce travail est négatif (travail résistant); il a donc fallu *fournir* l'énergie $W = -W_m = 2.10^{-4}$ J.

FORCE ELECTROMOTRICE INDUITE

☐ **Relation fondamentale.** — Considérons un circuit, composé d'un générateur de f.é.m. E et d'une résistance R, qu'on déplace dans un champ magnétique $\vec{B}$. A l'instant t, il y circule un courant i. Faisons le bilan énergétique pendant l'intervalle de temps dt; l'énergie fournie par le générateur doit être équilibrée par l'effet Joule et par le travail dW des forces électromagnétiques :

$$E\, i\, dt = R\, i^2\, dt + dW = R\, i^2\, dt + i\, d\Phi$$

où $d\Phi$ désigne le **flux coupé** par le circuit pendant le temps dt.
On en tire :

$$E - \frac{d\Phi}{dt} = R\, i$$

Tout se passe comme si une f.é.m. supplémentaire était apparue; c'est la **f.é.m. induite** :

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Remarque : cette f.é.m. induite existe même si le circuit ne comporte pas de générateur. On a alors un **courant induit** dont le sens est tel que **le flux du champ qu'il crée soit opposé à la variation du flux de $\vec{B}$** (Loi de *Lenz*); on dit que le courant induit s'oppose à la variation de flux.

☐ **Self induction.** — Il y a une f.é.m. induite chaque fois que le flux varie, quelle que soit la cause de la variation de flux. En particulier, le passage d'un courant i dans un circuit fermé crée, en tout point de l'espace, un champ d'induction magnétique $\vec{B}$ dont le flux Φ à travers la surface délimitée par le circuit est généralement proportionnel à i (ce n'est pas vrai pour un circuit comportant une bobine à noyau de fer doux, par exemple) :

$$\boxed{\Phi = L\, i}$$

L est un coefficient positif appelé **coefficient de self-induction**, exprimé en *henrys* (H).
Si i varie, il y a variation du flux et, par suite, apparition d'une f.é.m. induite

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}}$$

Exercice. — *Déterminer le coefficient de self-induction d'un solénoïde de rayon R, de longueur l et comportant N spires.*
Application numérique : R = 1 cm, L = 10 cm, N = 1000.

Le champ $\vec{B}$ peut, en première approximation, être considéré comme uniforme à l'intérieur du solénoïde; on a donc, s'il circule un courant I :

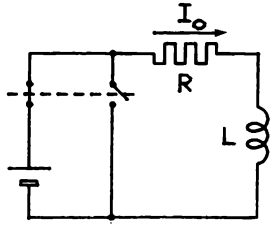
$$B = N\frac{\mu_0 I}{l} \qquad \text{(voir plus haut)}$$

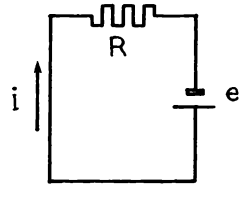
d'où $$\Phi = B \times N\,\pi\,R^2 = \frac{N^2\,\mu_0\,\pi\,R^2}{l} I = L\,I$$

On a ainsi

$$L = \frac{\pi\,N^2\,\mu_0\,R^2}{l} = 4.10^{-3}\ \text{H}$$

☐ **Energie emmagasinée dans une self.** — Dans le circuit représenté sur la figure, on ferme l'interrupteur à l'instant t = 0.





Pour $t > 0$, la self introduit une f.é.m. induite qui tend à s'opposer à la diminution du courant; le circuit est équivalent à celui représenté à droite sur la figure ci-contre; le générateur de f.é.m y remplace la self.

$$e = -L\frac{di}{dt}$$

Puisque i décroît, $\frac{di}{dt}$ est négatif et e est positif sur la figure.

On a donc :

$$-Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

ou $$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

soit $$i = I_0 e^{-(R/L)t} \text{ puisque } i = I_0 \text{ pour } t = 0$$

Entre $t = 0$ et $t \to \infty$, i décroît de I_0 à 0.
Le travail de la f.é.m. induite est donc :

$$W = \int_{t=0}^{\infty} e\,i\,dt = \int_{t=0}^{\infty} -L\frac{di}{dt}idt$$

soit $$W = \int_{i=I_0}^{0} -L\,i\,di = \left[-\frac{1}{2}L\,i^2\right]_{I_0}^{0}$$

ou $$\boxed{W = \frac{1}{2}L\,I_0^2}$$

Ce travail peut être considéré comme de l'**énergie emmagasinée** dans la self, puisque cette dernière a fourni l'énergie entre $t = 0$ et $t \to \infty$.

TESTS

1. *Une sphère de rayon R, uniformément chargée, porte une charge Q. En raison de la symétrie sphérique, le champ $\vec{E}$ est radial et son module est le même à tous les points situés à la même distance r du centre O. Appliquer le théorème de Gauss à une sphère de centre O et de rayon r; en déduire E à la distance r de O.*

2. *Sur l'axe Ox, on dispose une charge $-q$ en $A(-a)$ et une charge $+q$ en $B(a)$. Déterminer le champ et le potentiel en tout point M d'abscisse x.*

3. *a) Quelle doit-être la surface des armatures d'un condensateur plan d'épaisseur 10 μm et de capacité 10 nF ?*
   b) Quelle est la tension maximale admissible ? Le diélectrique est l'air.

4. *Un ampèremètre de résistance interne $r = 1\ \Omega$ peut mesurer une intensité maximale $i_M = 10\ mA$.*
a) Quelle résistance R (shunt) doit-on disposer en parallèle à ses bornes pour pouvoir mesurer une intensité maximale $I_M = 20\ mA$?
b) Quelle est la résistance interne du nouvel ampèremètre ainsi formé ?
c) Quelles sont les différences de potentiel maximales aux bornes de l'ampèremètre dans ces deux cas ?

5. *Une pile de f.é.m. $E = 10$ volts et de résistance interne négligeable alimente un circuit comportant une résistance $R = 100\ \Omega$ et un condensateur $C = 10\ \mu F$ en série.*
a) Calculer la tension v aux bornes du condensateur en fonction du temps. Pour $t < 0$ le condensateur était déchargé.
b) Quand le condensateur est chargé ($v = E = 10$ V) on branche une résistance $R' = 20\ \Omega$ à ses bornes, le reste du circuit étant inchangé. Déterminer v(t). On prend comme instant $t = 0$, celui du branchement de la résistance R'.
c) Comparer les deux constantes de temps obtenues.

6. *Un générateur sinusoïdal (tension efficace 220 volts, fréquence 50 Hz) alimente un circuit formé par une résistance ($R = 10\ \Omega$) et une self ($L = 0{,}1$ H) en série.*
a) Calculer l'intensité efficace I du courant fourni par le générateur.
b) Calculer le déphasage entre courant et tension.
c) Quelle est la puissance moyenne fournie par le générateur ?

7. *Expérience de Millikan.*
Les armatures horizontales d'un condensateur sont distantes de $l = 10$ mm. On pulvérise entre-elles des gouttelettes d'huile de rayon $R = 10^{-2}$ mm; cette opération ionise les gouttelettes qui portent alors la charge q. La vitesse de chute est $v = 0{,}1\ mm.s^{-1}$ en l'absence de champ électrique et elle vaut $v' = -0{,}05\ mm.s^{-1}$ (les gouttelettes montent) quand l'armature supérieure est portée au potentiel 3000 volts par rapport à l'inférieure.
a) La viscosité dynamique de l'air étant $\mu = 17.10^{-6}$ Pl, trouver la relation liant le poids de chaque gouttelette et v.
b) Déterminer la charge q. Comparer à celle de l'électron.

8. *Un proton décrit une trajectoire circulaire à la vitesse v_0 sous l'action d'un champ électrique $\vec{B} \perp \vec{v_0}$. Calculer :*
a) le rayon R du cercle décrit
b) la période du mouvement. Conclusion ?

9. *Un tige métallique, parcourue par un courant I, glisse sur deux rails parallèles distants de d. Déterminer la force subie par la tige en présence d'un champ magnétique $\vec{B}$ orthogonal au plan des rails.*

10. *On reprend le dispositif du test précédent. La tige, repérée par son abscisse x, est soumise à l'action d'un ressort $F = -kx$; elle est, de plus, insérée dans un circuit de résistance R dépourvu de générateur.*
a) Exprimer le courant induit dans le circuit en fonction de $\frac{dx}{dt}$
b) En déduire l'équation différentielle du mouvement de la tige.

MOUVEMENTS VIBRATOIRES

OPTIQUE

MOUVEMENTS VIBRATOIRES

PHÉNOMÈNES PÉRIODIQUES

Les phénomènes périodiques occupent une place importante tant en électricité, optique, acoustique qu'en mécanique. Dans tous ces domaines, certains caractères généraux peuvent être dégagés sur les mouvements vibratoires.

☐ **Définitions.** — Un phénomène est *périodique* s'il se reproduit identique à lui-même à des intervalles de temps égaux. Le plus petit de ces intervalles est la *période* T du phénomène (elle s'exprime en secondes : s).

Si y mesure la grandeur variable périodique

$$y = f(t) = f(t + kT) \text{ avec k un entier quelconque}$$

A la place de la période T on peut considérer son inverse $\frac{1}{T} = N$ ou *fréquence*; c'est le nombre de périodes par unité de temps (elle s'exprime en s^{-1} ou hertz : Hz).
Si y prend successivement des valeurs positives et négatives, on dit que la fonction périodique est *alternative*.

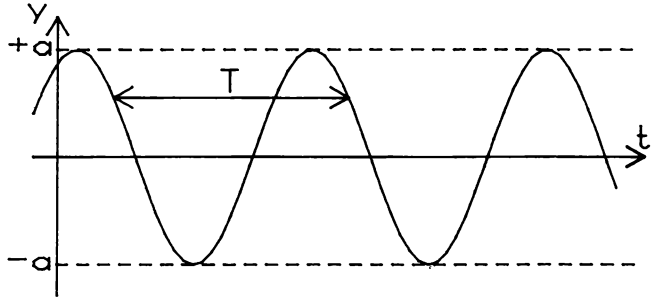
☐ **Phénomènes périodiques sinusoïdaux.** — La fonction $y = f(t)$ peut avoir un aspect plus ou moins compliqué. On dit que la vibration est *complexe* par opposition à la vibration sinusoïdale qui est dite *simple*. Les fonctions sinusoïdales ont une importance exceptionnelle par suite du théorème de Fourier. La forme générale de tout mouvement sinusoïdal peut se représenter par une équation de la forme

$$y = a \sin (\omega t + \varphi)$$

où y : élongation à l'instant t
a : amplitude ou élongation maximale
ω : pulsation du mouvement
φ : phase à l'origine des temps
$\omega t + \varphi$: phase à l'instant t.

ω, pulsation du mouvement, est lié à la période T et à la fréquence N par la relation :

$$\omega = 2\pi N = \frac{2\pi}{T}$$



L'équation générale peut également s'écrire sous les formes

1 : $y = A \sin \omega t + B \cos \omega t$
avec $A = a \cos \varphi$ et $B = a \sin \varphi$

2 : $y = a \cos (\omega t + \varphi')$

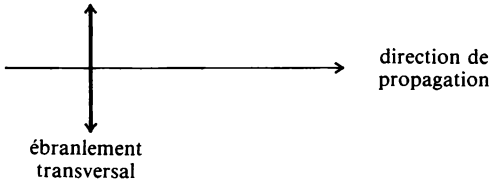
avec $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$

On peut donc représenter une fonction sinusoïdale aussi bien par une expression en sinus qu'en cosinus.

PROPAGATION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES

Une vibration ne peut se propager que dans un milieu élastique, c'est-à-dire qui revient à son état initial lorsque la cause de la déformation cesse. Les gaz, un ressort et les liquides sont des exemples de milieux élastiques.

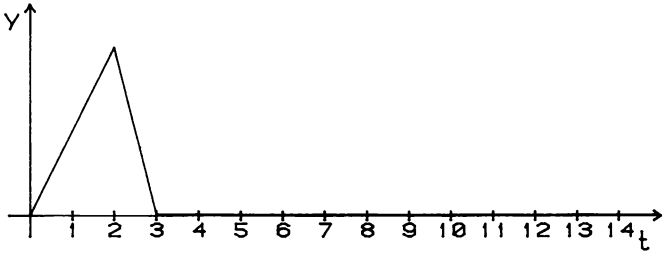
☐ **Propagation d'un ébranlement transversal unique.** — L'ébranlement est transversal si les points du milieu élastique se déplacent perpendiculairement à la direction de propagation. Par exemple, la chute d'une pierre dans l'eau produit de tels effets.



• La propagation s'effectue à *vitesse constante*. Le mouvement de propagation est uniforme; il ne dépend pas des grandeurs géométriques de l'ébranlement mais seulement de la nature du milieu élastique.

• Chaque point reprend le mouvement du point de départ avec un retard qui dépend de la distance à laquelle il se trouve de ce dernier.

Exercice. — *L'extrémité d'une corde est animée d'un déplacement transversal qui est représenté en fonction du temps sur la figure :*

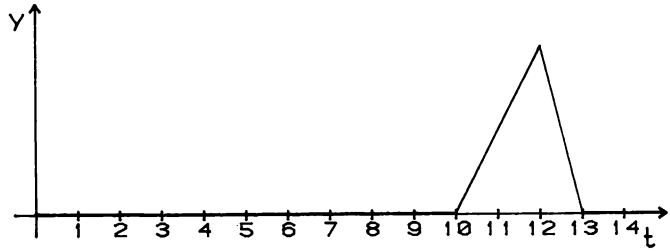


Représenter le mouvement du point M situé à une distance l = 2,5 m de l'origine O si la vitesse de propagation des vibrations transversales sur la corde est v = 25 cm/s.

Pour atteindre le point M, l'ébranlement va mettre le temps

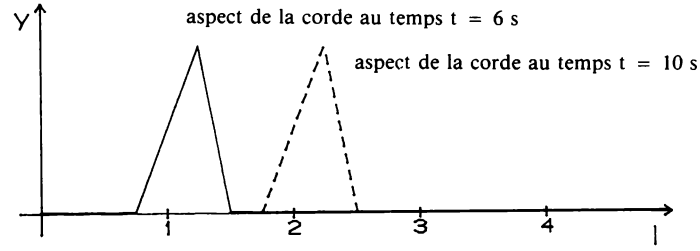
$$t = \frac{l}{v} = \frac{2,5}{0,25} = 10 \text{ s.}$$

A partir du temps t = 10 s, le point M va reproduire le mouvement de O.



On peut se demander également quel est l'aspect de la corde au temps t = 6 s.

Au bout de 6 s, l'ébranlement a parcouru la distance
l = v × t = 0,25 × 6 = 1,5 m. La corde a alors l'aspect dessiné sur la figure en fonction de la distance l.



L'ébranlement modifie l'élongation d'un point donné de la corde pendant 3 s, la corde sera donc déformée sur la longueur
l = v × t = 0,25 × 3 = 0,75 m.

□ **Propagation d'un ébranlement longitudinal unique.** — L'ébranlement est longitudinal si les points du milieu élastique se déplacent parallèlement à la direction de propagation (par exemple, ressort à boudin que l'on comprime).

Les lois de propagation données pour un ébranlement transversal restent valables.

☐ **Propagation de vibrations transversales entretenues.** — Seul le cas de vibrations sinusoïdales est considéré. Lorsque le mouvement est entretenu, un train d'ondes se propage alors dans le milieu élastique. Dans ce paragraphe, on suppose que les phénomènes de réflexion n'interviennent pas.
On peut obtenir un tel mouvement en utilisant un diapason entretenu électriquement.

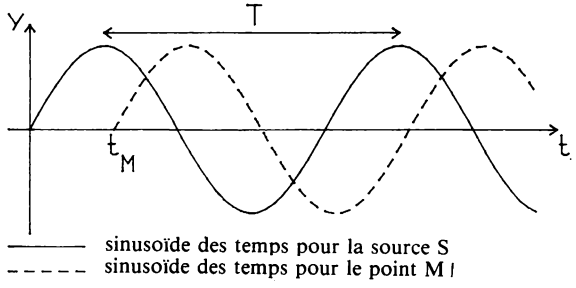
1. Mouvement d'un point donné en fonction du temps - Sinusoïde des temps. — Pour un point M donné, situé à une distance x de l'extrémité, le mouvement reproduit celui de la source avec un retard

$$t_M = \frac{x}{v}$$

si v est la vitesse avec laquelle se déplacent les ébranlements.

$$y_S = a \sin \omega t$$
$$y_M = a \sin \omega(t - t_M) = a \sin \omega(t - \frac{x}{v})$$

L'élongation y_M du point M n'est fonction que du temps. Elle est représentée par une sinusoïde de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (la même que celle de la source).



——— sinusoïde des temps pour la source S
– – – – – sinusoïde des temps pour le point M

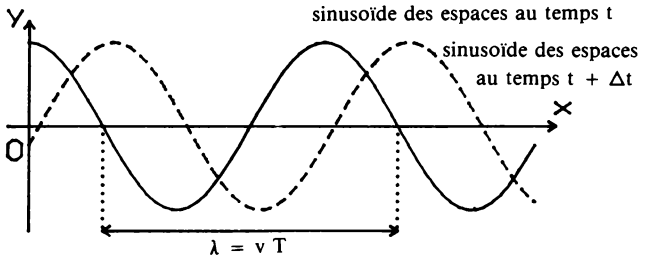
2. Mouvement de la corde à un instant donné - Sinusoïde des espaces. — L'élongation d'un point M peut s'écrire

$$y_M = a \sin \omega(t - t_M)$$
$$= a \sin 2\pi (\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

La grandeur λ ou *longueur d'onde* est la distance parcourue par la vibration pendant une période T. La longueur d'onde est donnée par :

$$\lambda = v\,T = \frac{v}{N}$$

où N est la fréquence de la vibration. Si t est considéré comme une constante, y_M peut être considéré comme une fonction de x que l'on peut représenter dans le plan xOy.



Cette sinusoïde se déplace le long de Ox au cours du temps sans se déformer.

3. Phase relative des points de la corde.

- Deux points séparés par une distance x égale à un nombre entier de longueurs d'ondes sont en *phase*

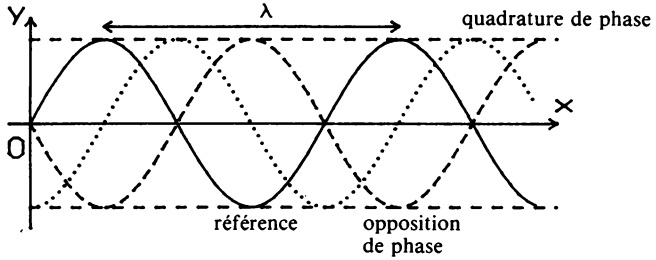
$$x = k\lambda$$

- Deux points séparés par une distance x égale à un nombre impair de demi-longueurs d'onde sont en *opposition de phase*

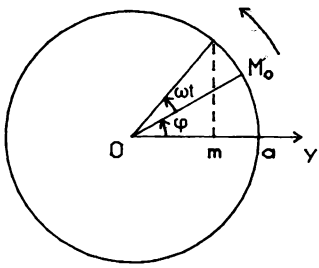
$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

- Deux points séparés par une distance x égale à un nombre impair de quarts de longueurs d'onde sont en *quadrature de phase*

$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$$



☐ **Relation entre mouvement sinusoïdal et mouvement circulaire uniforme.**
— Le mouvement sinusoïdal peut être considéré comme la *projection d'un mouvement circulaire uniforme sur un axe fixe.*



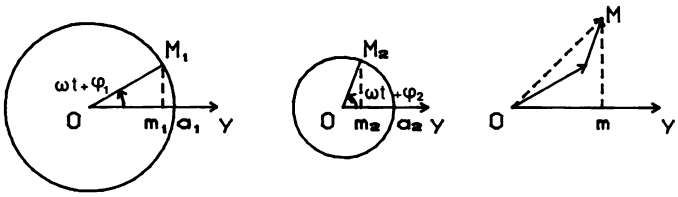
Si M décrit, d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω, le cercle de centre O et de rayon a, la projection, à l'instant t, de OM sur l'axe Oy est

$$y = a \cos (\omega t + \varphi)$$

Représentation de Fresnel. — On peut faire correspondre à toute fonction sinusoïdale $y = a \cos (\omega t + \varphi)$, un vecteur $\overrightarrow{OM}$ tournant autour de O à la vitesse angulaire ω et faisant avec l'axe Oy un angle $(\omega t + \varphi)$ à l'instant t.

Exemple d'application : *Soit à additionner les deux fonctions de même pulsation* $y_1 = a_1 \cos (\omega t + \varphi_1)$ *et* $y_2 = a_2 \cos (\omega t + \varphi_2)$.

Elles correspondent aux deux mouvements circulaires uniformes :



Les projections de $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sur Oy, à l'instant t correspondent aux deux fonctions y_1 et y_2.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ a comme projection sur Oy

$$Om = Om_1 + Om_2 = y_1 + y_2$$

Ce vecteur tourne sans se modifier au cours du temps car $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ tournent à la même vitesse angulaire. La relation $Om = y_1 + y_2$ est donc vérifiée quel que soit t. $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur de Fresnel de la somme des deux vibrations d'élongations y_1 et y_2.

□ **Théorème de Fourier.** — Dans la pratique, les vibrations complexes sont plus courantes que les vibrations sinusoïdales. Le mathématicien Fourier a démontré que :

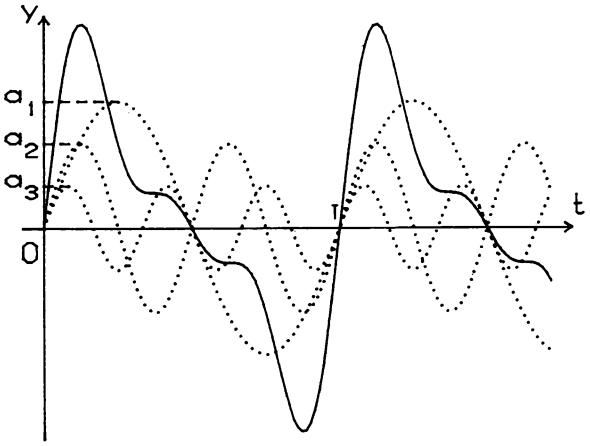
Toute fonction périodique de fréquence N, même très complexe, peut être approchée par une série de la forme :

$$a_0 + a_1 \sin(2\pi N t + \varphi_1) + a_2 \sin(2\pi 2N t + \varphi_2) + a_3 \sin(2\pi 3N t + \varphi_3) + \cdots$$

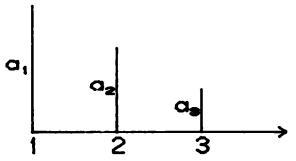
L'amplitude décroît généralement lorsque la fréquence croît.
La vibration de fréquence 3N est appelée vibration *harmonique 3* de la vibration *fondamentale* de fréquence N. *Le spectre des fréquences* de la fonction périodique représente les amplitudes relatives de chacune de ses harmoniques.

Exemple : Sur la figure sont représentées trois vibrations de fréquences N, 2N et 3N (ou de période T_1, T_2 et T_3) en phase ainsi que la vibration somme. Celle-ci est une vibration périodique de fréquence N mais qui n'est plus sinusoïdale.

☐ **Principe de superposition** (corollaire du théorème de Fourier).



Spectre des fréquences de la vibration $y = y_1 + y_2 + y_3$



fondamentale harmonique harmonique
1 2 3

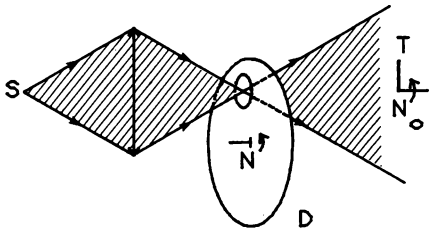
L'effet de deux vibrations simultanées est le même que l'effet dû à la vibration somme de celles-ci.

Ce principe sera utilisé dans les paragraphes suivants.

STROBOSCOPIE
MOYEN D'ETUDE DES PHENOMENES VIBRATOIRES RAPIDES

La méthode stroboscopique est très utilisée tant au laboratoire que dans l'industrie.

□ **Méthode expérimentale.** — Une tige T est entraînée dans un mouvement de rotation par un moteur de fréquence N_0 constante. Cette rotation uniforme est un phénomène périodique que nous pouvons étudier avec le stroboscope.



Le disque D est entraîné par un moteur à la fréquence N. Il est percé d'un trou qui passe, à chaque tour, au point de convergence d'un faisceau lumineux donné par la source S.
La tige T est donc éclairée périodiquement par des éclairs à la fréquence N. La vitesse de rotation du disque D est variable. Si nous l'augmentons lentement, nous constatons que la tige semble immobile pour certaines valeurs de la vitesse, ou semble tourner plus ou moins vite dans un sens ou dans l'autre. On peut également voir plusieurs tiges immobiles.

□ **Explication du phénomène**

• Si la tige tourne à la même vitesse que le disque, la fréquence des éclairs est égale à la fréquence du phénomène. Entre deux éclairs, la tige tourne exactement d'un tour et nous ne l'observons que pendant la durée très brève de ces éclairs; c'est-à-dire, toujours dans la même position : *la tige* semble immobile.

• Si $N_0 = 2N, 3N, \ldots$, l'immobilité apparente se produit encore puisque la tige fait 2, 3 tours entre deux éclairs.

• Si $N_0 = \frac{N}{2}, \frac{N}{3} \ldots$, la tige fait $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$ de tours entre deux éclairs et on peut observer la tige immobile à 2, 3 ... endroits à des distances angulaires $\pi, \frac{2\pi}{3} \ldots$

• Si N_0 prend des valeurs différentes, la tige semble tourner lentement. Supposons N légèrement inférieur à N_0. Entre deux éclairs, la tige fait un peu plus d'un tour complet et, du fait de la persistance des impressions lumineuses sur la rétine, la tige semble tourner au ralenti dans le même sens que le mouvement réel. Si, entre chaque éclair, la tige fait $(1 + \frac{1}{n})$ tour, l'œil à l'impression qu'elle n'effectue que $\frac{1}{n}$ ème de tour. Elle paraît donc faire un tour

complet en un temps n fois plus grand et la fréquence du mouvement ralenti apparent a la valeur :

$$\boxed{\nu = N_0 - N}$$

Remarque : si N est légèrement supérieur à N_0, la tige semble tourner dans le sens opposé au sens réel.

□ **Conséquences.** — La stroboscopie permet :
- l'étude d'un phénomène trop rapide pour permettre une observation directe,
- de mesurer la fréquence d'un phénomène si N est connu,
- l'étude du phénomène au ralenti.

Exercice. — *Pour vérifier la vitesse de rotation du plateau d'un électrophone au voisinage de 33 tours par minute, on place sur le plateau un disque blanc sur lequel on a tracé 180 rayons noirs régulièrement espacés. On éclaire l'ensemble à raison de 50 éclairs par seconde. Quelle est la vitesse de rotation du plateau si les traits apparaissent parfaitement immobiles ?*

Puisque le disque apparaît immobile, c'est qu'un rayon vient remplacer exactement un autre rayon entre deux éclairs du stroboscope. Le disque a donc tourné d'un angle

$$\alpha = k \times \frac{360}{180} = 2\,k \text{ degrés}$$

Il y a 50 éclairs par seconde, la vitesse de rotation du disque est donc

$$\alpha' = 2k \times 50 = 100\,k \text{ degrés/s}$$

$$\text{ou } \alpha' = \frac{100k}{360} \text{ tours/s} = \frac{100 \times 60}{360} k = \frac{100k}{6} \text{ tours par minute.}$$

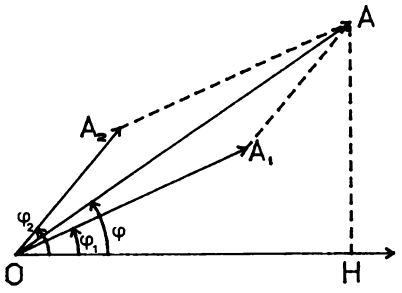
Pour $k = 1$ $\quad \alpha' = 16{,}67$ tours par minute
Pour $k = 2$ $\quad \alpha' = 33{,}33$ tours par minute.
Cette valeur étant proche de 33 tours par minute, convient. La vitesse réelle de cet électrophone est donc $n = 33{,}33$ tours par minute.

INTERFERENCES

□ **Composition de deux vibrations sinusoïdales.** — Nous considérons deux sources S_1 et S_2 de vibrations sinusoïdales de même pulsation et de même direction. En un point M de l'espace situé à des distances d_1 et d_2 des sources, nous pouvons appliquer le principe de superposition. M est soumis à une vibration d'élongation égale à la somme des élongations des vibrations issues de S_1 et S_2.
Nous pouvons utiliser la représentation de Fresnel.

Si y_1 et y_2 sont les deux vibrations provenant de S_1 et S_2 :

$$y_1 = a_1 (\sin \omega t + \varphi_1)$$
$$y_2 = a_2 (\sin \omega t + \varphi_2)$$



$$y = y_1 + y_2 = a \sin (\omega t + \varphi)$$

(d'après le principe de superposition).

La méthode de Fresnel permet de construire facilement le vecteur correspondant à la vibration résultante.

Amplitude de la vibration résultante.

L'utilisation des relations dans le triangle quelconque OAA_1 permet d'écrire

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)$$

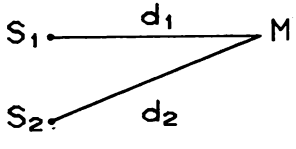
Phase à l'origine de la vibration résultante

Dans le triangle OAH, $\text{tg } \varphi = \dfrac{AH}{OH} = \dfrac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$

□ **Franges d'interférences.** — Les deux vibrations arrivant en M sont respectivement (si les amplitudes sont égales)

$$y_1 = a \sin (\omega t - \varphi_1)$$
$$y_2 = a \sin (\omega t - \varphi_2)$$

avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et $\varphi_1 = 2\pi \dfrac{d_1}{\lambda}$; $\varphi_2 = 2\pi \dfrac{d_2}{\lambda}$ $(\lambda = vT)$



$$\text{soit } y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)$$

$$\text{soit } y = y_1 + y_2 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right) + a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right) = A \sin (\omega t - \phi)$$

$$\text{avec } A^2 = 2a^2 + 2a^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$= 2a^2 (1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) = 4a^2 \cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

$$A = 2a \cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 2a \cos\left[\frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)\right]$$

La quantité $(d_2 - d_1)$ est appelée *différence de marche* entre les deux vibrations

$$\text{et } \operatorname{tg} \phi = \frac{a(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)}{a(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)} = \operatorname{tg}\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$\phi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{\pi (d_1 + d_2)}{\lambda}$$

Points d'amplitude maximale.

$$\text{Il faut que } \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = k\pi \quad \text{soit} \quad d_2 - d_1 = k\lambda$$

Tous les points correspondant à la plus grande amplitude sont tels que la différence de marche est égale à un nombre entier de longueurs d'onde.

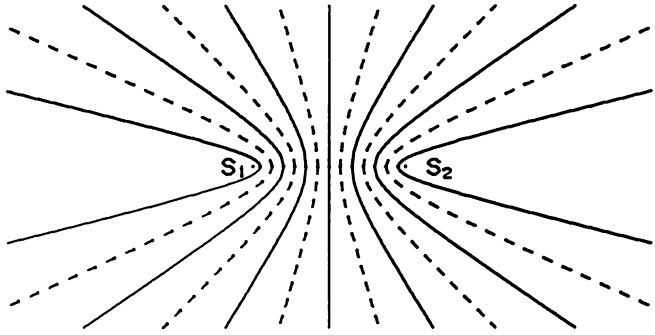
Points d'amplitude nulle.

$$\text{Il faut que } \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{soit} \qquad d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Tous les points correspondant à une amplitude nulle sont tels que la différence de marche est égale à un nombre entier impair de demi-longueurs d'onde.

Les deux relations précédentes définissent dans un plan une famille d'hyperboles de foyers S_1 et S_2.



Remarques :
1. En fait le phénomène peut se produire dans tout l'espace; la famille d'hyperboles doit alors être remplacée par une famille d'hyperboloïdes de révolution obtenue par la rotation autour de S_1S_2 de la famille d'hyperboles.
2. Si l'observation ne se fait que dans la région proche de S_1 et S_2, les fragments d'hyperboles apparaissent alors comme des segments de droites équidistants et parallèles.

□ **Quelques exemples d'interférences.** — Le phénomène d'interférences se manifeste quelle que soit la nature de la vibration sinusoïdale. Citons quelques exemples.

En mécanique : franges d'interférences produites sur un liquide à la surface duquel on fait vibrer deux pointes solidaires d'un diapason.
En acoustique : deux sons peuvent interférer et on peut ainsi obtenir un silence absolu à partir de deux ondes sonores.
En électricité : on peut obtenir un courant nul en superposant deux courants alternatifs.
En optique : de nombreux exemples sont donnés dans le chapitre spécial correspondant.

Exercice. — *Une lame vibrante est munie de pointes identiques et parallèles qui frappent verticalement la surface de l'eau en deux points S_1 et S_2. Cette lame est animée d'un mouvement sinusoïdal de fréquence 60 Hz. L'amplitude des ondes transversales produites par chacune des pointes est de 2 mm. La vitesse de propagation des ondes à la surface de l'eau est de 30 cm/s. On négligera les phénomènes d'amortissement et de réflexion.*
Calculer l'état vibratoire d'un point M situé à la distance $d_1 = 4{,}5$ cm et $d_2 = 3{,}75$ cm des sources S_1 et S_2.

2. Faire un schéma de la surface de l'eau sur lequel seront tracées les lignes d'amplitude maximale si $S_1S_2 = d = 2$ cm.

1. La vibration qui provient de S_1 est

$$y_1 = a \sin \omega(t - \frac{d_1}{v}),$$

celle qui provient de S_2 est

$$y_2 = a \sin \omega(t - \frac{d_2}{v}).$$

En M, la vibration résultante est la somme algébrique de ces deux vibrations

$$y = y_1 + y_2 = 2a \sin \omega(t - \frac{d_1 + d_2}{2v}) \cos \omega(\frac{d_2 - d_1}{2v})$$

L'amplitude de la vibration en M est donc

$$A = 2a \cos[\omega \frac{(d_2 - d_1)}{2v}]$$

$$= 2 \times 2. 10^{-3} \cos[2\pi \times 60 \frac{(4{,}5 - 3{,}75)\ 10^{-2}}{2 \times 0{,}3}]$$

$$= 4. 10^3 \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

Le point M est immobile.

2. On peut calculer la longueur d'onde des vibrations émises par les sources :

$$\lambda = vT = \frac{0{,}3}{60} = 5. 10^{-3} \text{ m} = 5 \text{ mm}$$

Les points d'amplitude maximale sont tels que

$$d_2 - d_1 = k\lambda$$

Cette relation définit une famille d'hyperboles dont on peut trouver les intersections avec le segment $S_1S_2 = d$.
Nous avons les deux relations pour $M \in S_1S_2$

$$d_2 + d_1 = d \qquad (1)$$
$$d_2 - d_1 = k\lambda \qquad (2)$$

En additionnant (1) et (2) on obtient :

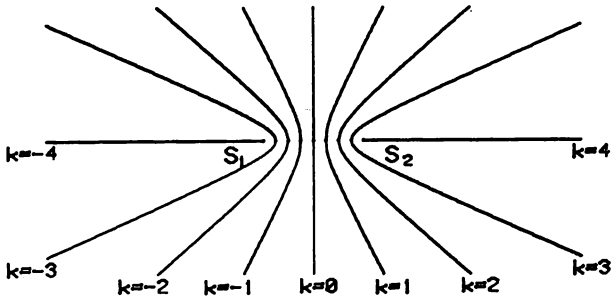
$2d_2 = d + k\lambda$ avec $d_2 \leqslant d$

soit $d_2 = \frac{d}{2} + k\frac{\lambda}{2} = (10 + k \times 2{,}5)$ mm

et $0 \leqslant 10 + 2{,}5k \leqslant 20$

$-4 \leqslant k \leqslant 4$

Il y a donc 9 valeurs possibles pour k soit 9 franges d'amplitude maximale. Pour $k = \pm 4$, l'hyperbole est ramenée à une demi-droite.



BATTEMENTS

Lorsque les deux vibrations ont des fréquences légèrement différentes, le phénomène de battements se produit. Celui-ci présente une grande importance pratique.
Les deux vibrations ont alors la forme

$$y_1 = a \sin 2\pi N_1 t$$

$$y_2 = a \sin 2\pi N_2 t$$

si l'on choisit l'origine des temps à l'instant où y_1 et y_2 sont en phase.

$$y = y_1 + y_2 = a(\sin 2\pi N_1 t + \sin 2\pi N_2 t)$$

$$= 2a \sin (\pi N_1 t + \pi N_2 t) \cos(\pi N_1 t - \pi N_2 t)$$

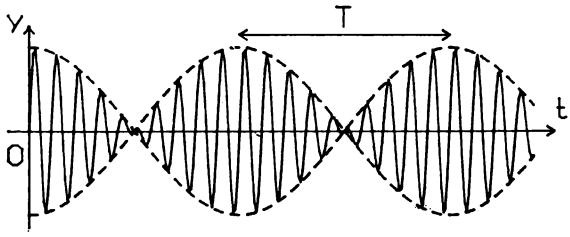
$$= 2a \sin \pi(N_1 + N_2)t \cos \pi(N_1 - N_2)t$$

La vibration est alors égale au produit de deux fonctions sinusoïdales :

la première de fréquence $\dfrac{N_1 + N_2}{2}$;

la seconde de fréquence $\dfrac{N_1 - N_2}{2}$

La fonction peut être représentée graphiquement :

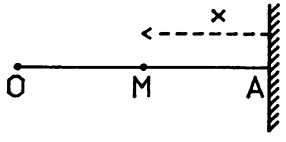


Deux maxima principaux sont donc séparés par la période $T = \frac{1}{|N_1 - N_2|}$

Plus les fréquences des deux vibrations y_1 et y_2 sont proches et plus les battements deviennent espacés.
Ce phénomène de battements est très souvent utilisé en radio (changement de fréquence).

ONDES STATIONNAIRES

Nous ne traiterons que le cas d'une corde fixée à son extrémité A alors qu'elle est soumise à une vibration sinusoïdale de période T et d'amplitude a à son autre extrémité O.
Le phénomène d'ondes stationnaires provient de l'interférence des ondes incidentes et réfléchies (c'est-à-dire se propageant en sens contraires sur la même direction et de même fréquence).



Cherchons le mouvement d'un point M situé à la distance x de A.
Si le point A pouvait vibrer, l'onde *incidente* seule lui communiquerait un mouvement vibratoire de période T, que l'on peut écrire, en choisissant convenablement l'origine des temps :

$$y_1 = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Pour exprimer le fait que le point A reste immobile, il faut admettre que cette vibration s'additionne à un autre mouvement périodique imposé par l'onde *réfléchie* d'équation

$$y_2 = - a \sin 2\pi \frac{t}{T_1}$$

En M, le mouvement incident est en avance sur celui de A

$$y_{1M} = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

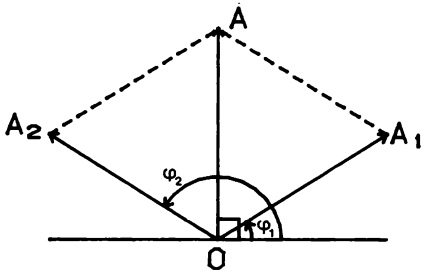
L'élongation de l'onde réfléchie est en retard sur celle de A

$$y_{2M} = -a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \pi - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Les déphasages respectifs de y_1 et y_2 sont donc

$$\varphi_1 = \frac{2\pi x}{\lambda} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \pi - \frac{2\pi x}{\lambda} = \pi - \varphi_1$$

L'élongation résultante $y = y_1 + y_2$ est donc représentée dans la construction de Fresnel par un vecteur vertical:



L'amplitude de y est donc

$A = 2a \sin \varphi_1 = 2a \sin 2\pi\frac{x}{\lambda}$ et la phase est $\frac{\pi}{2}$.

$$y = 2a \sin\frac{2\pi x}{\lambda} \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$$

L'amplitude est nulle pour $2\pi\frac{x}{\lambda} = k\pi$ soit $x = k\frac{\lambda}{2}$.

Ces point sont les *nœuds d'élongation*.

L'amplitude est maximale pour $2\pi\frac{x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ soit $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$.

Ces points sont les *ventres d'élongation*.

Tous les points qui ont des amplitudes de même signe sont en phase; de part et d'autre d'un nœud, les points vibrent en opposition de phase.

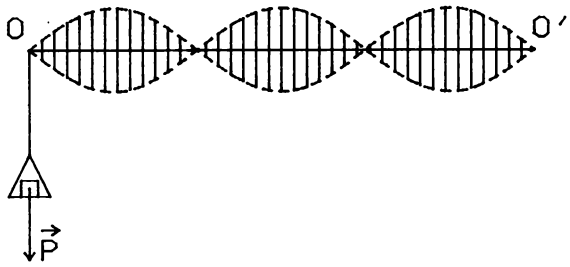
Si l'extrémité est libre il suffit de conserver le même signe à l'onde réfléchie qu'à l'onde incidente. Dans ce cas on montre de la même façon que

$$A = 2a \cos\frac{2\pi x}{\lambda}$$

Exercice. — *Un fil est tendu horizontalement sur une longueur OO' = 2 m, entre une poulie O et une des branches O' d'un diapason*

entretenu et qui communique une vibration transversale au fil. Un plateau pouvant supporter des masses marquées est suspendu à l'extrémité libre du fil.
Le diapason produit un mouvement vibratoire de fréquence 60 Hz. Lorsque l'on fait varier progressivement la valeur des masses marquées sur le plateau, le fil vibre en formant un ou plusieurs fuseaux pour certaines valeurs.

La vitesse de propagation des vibrations le long d'un fil est $v = \sqrt{\frac{P}{\mu}}$ *où P est la tension du fil et* μ *sa masse par unité de longueur.*
Quelle masse doit-on mettre sur le plateau pour obtenir 3 fuseaux si $\mu = 0{,}2$ *g/m ?*



Si nous voulons 3 fuseaux, la distance OO' doit être égale à $3 \times \frac{\lambda}{2}$ puisque deux nœuds d'élongation sont séparés par une distante $\frac{\lambda}{2}$.
La longueur d'onde de la vibration doit donc être telle que

$$OO' = 2 = \frac{3}{2}\lambda \quad \text{soit } \lambda = \frac{4}{3}\text{m.}$$

$$\text{or } \lambda = vT = \frac{v}{N} \text{ ou } v = \lambda N = \frac{4}{3} \times 60 = 80 \text{ m/s}$$

$$\text{De plus } v = \sqrt{\frac{P}{\mu}} \text{ où } P = mg = \mu v^2$$

La masse m à mettre sur le plateau est donc

$$m = \frac{\mu v^2}{g} \quad \text{avec } \mu = 2.10^{-4} \text{ kg/m et } g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$$

$$m = \frac{2.10^{-4}.(80)^2}{9{,}81} = 0{,}13 \text{ kg.}$$

NATURE VIBRATOIRE DU SON
CELERITE DU SON

De nombreuses expériences mettent en évidence la nature vibratoire du son (cavaliers de papier posés sur une corde de piano par exemple).

☐ **Propagation du son.** — Les sons émis par une source doivent se propager dans l'air pour atteindre l'observateur qui peut les percevoir grâce à son sens de l'ouïe.

1. Le son ne se propage pas dans le vide. La formation d'une onde sonore de la source à l'oreille impose l'existence d'un milieu élastique continu.
Le son ne se propage pas seulement dans les gaz, mais également dans les solides et les liquides.
2. Le son est une vibration longitudinale. Ce sont des variations périodiques de la pression qui se propagent pour atteindre l'oreille.
3. Le son se propage avec une vitesse qui dépend du milieu. Cette vitesse est très inférieure à la vitesse de la lumière (nous voyons la fumée sortir du pistolet avant d'entendre le coup de feu).
Quel que soit le son émis, la vitesse de propagation est la même pour un même milieu (tous les sons émis par plusieurs instruments situés à la même distance nous parviennent en même temps).
4. Le son étant de nature vibratoire, des phénomènes d'interférences ou de battement vont pouvoir se produire.

☐ **Célérité du son dans les gaz**
1. Pour l'air sec à 0° C, les mesures récentes donnent

$$c = 330{,}75 \text{ m/s}$$

2. Formule de Laplace : si γ représente le rapport des chaleurs massiques à pression et à volume constants

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

la célérité du son a comme expression $c = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$

où P est la pression du gaz et ρ sa masse volumique.
γ ne dépend que de l'atomicité du gaz considéré.
Pour un gaz monoatomique (néon par exemple), $\gamma = 1{,}67$ et pour un gaz diatomique (air), $\gamma = 1{,}4$.

$$\rho = a\,d = a_0 \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} d \qquad (d : \text{densité du gaz}).$$

L'indice zéro correspond à la grandeur thermodynamique dans les conditions normales (P_0, T_0). a_0 est la masse volumique de l'air dans ces mêmes conditions.

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P_0 \cdot T}{a_0 . d \cdot T_0}}$$

Pour les gaz parfaits on montre aussi que $\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$

soit $c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$

où R est la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz.

□ **Lois.** — L'examen des deux formules précédentes permet d'en déduire plusieurs lois pour un gaz simple.
1. La célérité est indépendante de la pression du gaz.
2. La célérité est proportionnelle à la racine carrée de la température absolue du gaz.
3. La célérité est inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité du gaz (par rapport à l'air). Elle est inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse molaire. (En effet M = 29 d.)
4. La célérité est fonction de l'atomicité du gaz.

□ **Célérité du son dans l'eau et les solides.** — Elle est plus grande pour l'eau et encore plus grande pour les solides.
Dans l'eau de mer à 15° C : c = 1500 m/s.
Dans l'acier : c = 5000 m/s.

Exercice. — *Dans un gaz de densité d = 2,45 la célérité du son à une température donnée est 218,5 m/s. Calculer le rapport* $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ *des chaleurs massiques de ce gaz si, à la même température la célérité du son dans l'air est 342 m/s.*
Quelle est son atomicité et la valeur approchée de sa masse molaire ?

Pour le gaz $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0 T}{a_0 d T_0}}$

Pour l'air $c' = \sqrt{\frac{\gamma' P_0 T}{a_0 d' T_0}}$ avec d' = 1

Le rapport des deux expressions précédentes donne :

$$\frac{c}{c'} = \sqrt{\frac{\gamma . 1}{\gamma' . d}} \text{ ou } \gamma = \gamma' . d . \frac{c^2}{c'^2}$$

$$\text{soit } \gamma = 1{,}4 \times 2{,}45 \times \frac{(218{,}5)^2}{(342)^2} = 1{,}4$$

Le gaz est donc un gaz diatomique.

La masse molaire approchée est :

$$M = 29.d = 71{,}05$$

Il peut s'agir du gaz Cl_2.

EFFET DOPPLER

Pour un observateur immobile, le son provenant d'une source en déplacement (voiture par exemple) n'a pas la même fréquence selon que la source se rapproche ou s'éloigne de l'observateur. Ce phénomène porte le nom d'effet Doppler.

☐ **La source se rapproche de l'observateur immobile.** — Supposons que l'observateur voit venir dans sa direction une source sonore qui se déplace à la vitesse v et qui émet un son de fréquence $N = \frac{1}{T}$. V est la célérité du son dans les conditions d'observation. Entre deux maxima successifs du son émis par la source, cette dernière parcourt une distance $a = vT$. Le second maximum a une distance a à parcourir en moins pour atteindre l'observateur. Celui-ci va le percevoir plus tôt que si la source était restée immobile et la fréquence du son va donc apparaître comme plus grande. On a donc :

la différence de temps $\Delta t = \frac{a}{V} = \frac{v}{V}T$,

la période apparente $T' = T - \Delta t = (1 - \frac{v}{V})\,T$

et la fréquence apparente $N' = \frac{1}{T'} = \frac{V}{V - v}\frac{1}{T} = \frac{V}{V - v}N$

La fréquence apparente est bien plus élevée que la fréquence réelle.

☐ **L'observateur s'éloigne de la source immobile.** — Si l'observateur se déplace à la vitesse v', deux maxima successifs ont une distance $a' = v'T'$ à parcourir en plus (avec T' la période apparente)

$$\Delta t = \frac{a'}{V} = \frac{v'}{V}T'$$

soit $T' = T + \Delta t = T + \frac{v'}{V}T'$

ou $T'(1 - \frac{v'}{V}) = T$ et $T' = T\frac{V}{V - v'}$

$$\text{et } N' = N\frac{V - v'}{V}$$

La fréquence perçue par l'observateur est alors plus faible.

☐ **Cas général.** — Si l'on choisit comme sens positif pour les vitesses le sens de la source vers l'observateur (sens suivi par le son émis par la source)

$$N' = N \frac{V - v'}{V - v}$$

N fréquence réelle du son émis — N' fréquence apparente
V célérité du son dans le milieu — v vitesse de la source
v' vitesse de l'observateur

Exercice. — *Une voiture automobile se déplace à la vitesse de 72 km/h, de A vers B, en émettant un son de fréquence 800 Hz. Quelle va être la fréquence du son perçu par un observateur avant et après son passage,*
1. si l'observateur se maintient immobile entre A et B ?
2. si l'observateur se déplace vers A à une vitesse de 18 km/h ?
3. si l'observateur se déplace vers B à une vitesse de 36 km/h ?
Célérité du son dans l'air : 330 m/s.

$$V = 330 \text{ m/s}$$

1. a) Avant la rencontre
vitesse de la source > 0 : $v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$
vitesse de l'observateur $= 0$: $v' = 0$

$$N' = 800 \times \frac{330 - 0}{330 - 20} = 851{,}6 \text{ Hz}$$

Le son perçu est plus aigu que le son réel.

b) Après la rencontre

$$v < 0 \qquad v = -20 \text{ m/s} \quad ; \quad v' = 0$$

$$N' = 800 \times \frac{330 - 0}{330 + 20} = 754{,}3 \text{ Hz}$$

Le son perçu est plus grave que le son réel.

2. a) Avant la rencontre

$$v > 0 \quad v = 20 \text{ m/s}$$
$$v' < 0 \quad v' = -18 \text{ km/s} = -5 \text{ m/s}$$

$$N' = 800 \times \frac{330 + 5}{330 - 20} = 864{,}5 \text{ Hz}$$

Le son perçu est plus aigu que le son réel.

b) Après la rencontre

$$v < 0 \quad v = -20 \text{ m/s}$$
$$v' > 0 \quad v' = 5 \text{ m/s}$$

$$N' = 800 \times \frac{330 - 5}{330 + 20} = 742{,}9 \text{ Hz}$$

Le son perçu est plus grave que le son réel.

3. a) Avant la rencontre

$v > 0 \quad v = 20$ m/s

$v' > 0 \quad v' = 36$ km/h $= 10$ m/s

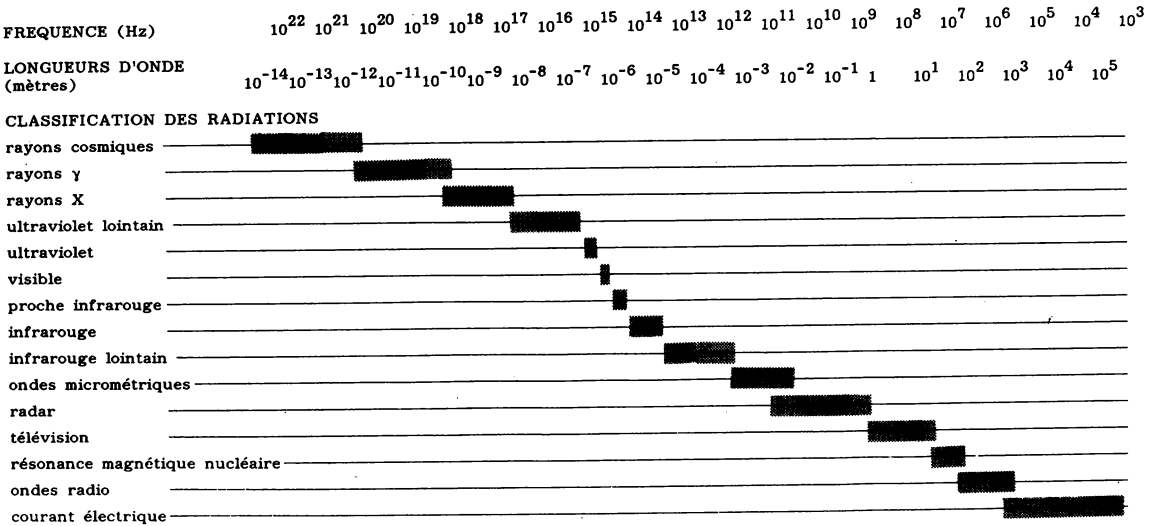
$$N' = 800 \times \frac{330 - 10}{330 - 20} = 825{,}8 \text{ Hz}$$

b) Après la rencontre

$v < 0 \quad v = -20$ m/s

$v' < 0 \quad v' = -10$ m/s

$$N' = 800 \cdot \frac{330 + 10}{330 + 20} = 777{,}1 \text{ Hz}$$



Différentes radiations électromagnétiques

OPTIQUE - GENERALITES

PROPAGATION DES VIBRATIONS LUMINEUSES

☐ **Généralités sur les ondes électromagnétiques.** — Ce sont des ondes qui comportent un vecteur champ électrique $\vec{E}$ et un vecteur champ magnétique $\vec{B}$ qui vibrent sinusoïdalement en phase, perpendiculaires entre eux et dans le plan d'onde (plan perpendiculaire à la direction de propagation); ce sont des ondes transversales.
Toutes les ondes électromagnétiques se propagent à la même vitesse dans le vide

$$c = 300\,000 \text{ km/s}$$

Les ondes électromagnétiques transportent de *l'énergie rayonnante*. Elles sont caractérisées par leur longueur d'onde. La gamme des longueurs d'onde est très étendue (de 10^{-13} m - rayons γ - à 2.10^{4} m - ondes radio longues). La lumière visible, qui nous intéresse dans ce chapitre, n'occupe qu'une bande très étroite de longueurs d'onde (de 400 à 800 nm environ).
Certains effets de la lumière (effet photoélectrique par exemple) ne peuvent être expliqués qu'en admettant la nature corpusculaire de la lumière (ou des radiations électromagnétiques).
La lumière se comporte comme si son énergie était concentrée dans des corpuscules appelés photons. Chaque photon transporte un quantum d'énergie :

$$E = h.\nu$$

où ν est la fréquence de la radiation en Hz et h la constante de Planck :

$$h = 6{,}62.10^{-34} \text{ J.s}$$

L'énergie transportée augmente donc comme la fréquence de la radiation.

☐ **Sources de lumière.** — Si l'on a longtemps considéré que les sources de lumières étaient des objets capables d'impressionner directement la rétine de l'œil, l'introduction de nouveaux récepteurs beaucoup plus sensibles (photomultiplicateurs par exemple) a permis de montrer que les propriétés des ondes visibles peuvent être étendues à l'ultraviolet et à l'infrarouge. C'est au niveau de l'atome qu'a lieu l'émission de lumière liée aux transitions des électrons entre les différents niveaux d'énergie d'un atome excité.

Sources classiques.

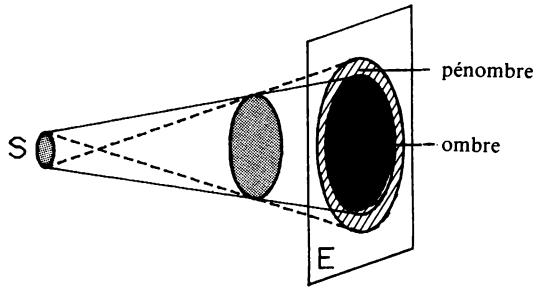
• **Sources chaudes :**
- Un solide émet de la lumière lorsqu'on le chauffe. Cette propriété est utilisée dans les *lampes à incandescence*.
- Des températures plus élevées sont atteintes dans les *lampes à arc* qui constituent des sources intenses de lumière blanche (arc au charbon).
- Les lampes à arc à *vapeur basse pression* (mercure par exemple) donnent les spectres de raies de la vapeur et sont utilisées pour obtenir des raies monochromatiques fines.

• **Sources froides** (émission par luminescence) :
Dans les *tubes à décharge*, une excitation électrique (différence de potentiel créée dans un gaz sous faible pression) produit un spectre de raies caractéristique de l'élément contenu dans le tube.

Sources cohérentes. — De nouvelles sources très importantes ont fait leur apparition et sont de plus en plus utilisées. Les *lasers* sont des tubes à décharge particuliers pour lesquels tous les rayons émis sont en phase et très monochromatiques. Ils sont donc aptes à faire des interférences (application aux hologrammes) et peuvent transporter une grande quantité d'énergie dans une région bien localisée (application en microchirurgie).

□ **Approximation de l'optique géométrique.** — La propagation des ondes électromagnétiques suit les lois de Maxwell. Lorsque le milieu est homogène et isotrope, les ondes lumineuses sont sphériques et, loin de la source, on peut les assimiler à des ondes sinusoïdales planes. Lorsque l'on a une succession de milieux isotropes (comme cela arrive fréquemment dans les systèmes optiques), cette approximation ne peut être conservée que dans le cas où on limite les faisceaux lumineux par des ouvertures très petites (inférieures au mm).

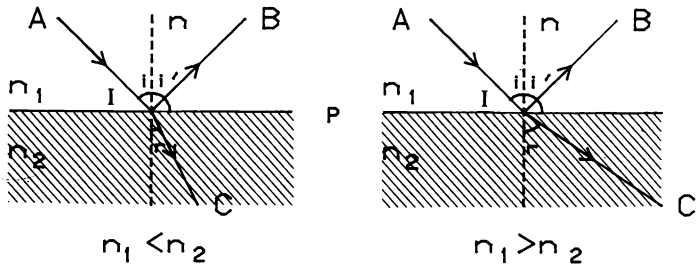
□ **Propagation rectiligne de la lumière.** — Les *rayons lumineux* se propagent donc en ligne droite dans un milieu homogène et isotrope; ils sont indépendants les uns des autres.
Ce principe est insuffisant car l'approximation faite n'est plus valable près du bord d'un écran par exemple et l'on a alors le phénomène de diffraction.
Ombre et pénombre. — Si la source est étendue, on peut mettre en évidence deux zones d'ombre différentes.



□ Réflexion et réfraction d'un rayon lumineux à la surface de séparation de deux milieux homogènes.

Définitions.

Dioptre : c'est la surface de séparation entre deux milieux homogènes.



Le *rayon incident* AI arrive sur le dioptre au *point d'incidence* I. nI, *normale* au dioptre au point d'incidence est perpendiculaire au plan tangent au dioptre P.
Le *plan d'incidence* est défini par le rayon incident et la normale. L'*angle d'incidence* i est l'angle que fait le rayon incident avec la normale au dioptre.
Généralement, le rayon incident donne naissance à deux rayons :
- un *rayon réfléchi* IB situé dans le milieu du rayon incident, qui fait un angle de réflexion i' avec la normale,
- un *rayon réfracté* IC situé dans le second milieu, qui fait un angle de réfraction r avec la normale.

L'*indice* d'un milieu isotrope est le rapport de la célérité de la lumière dans le vide et dans le milieu considéré; il est toujours supérieur à l'unité : $n = \frac{c}{v}$.

On dit qu'un milieu est plus ou moins *réfringent* suivant que la valeur de son indice de réfraction est plus ou moins élevé.

Lois de Descartes.

Pour la réflexion :
1. Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence,
2. l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence : $i = i'$

Pour la réfraction :
1. Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence,
2. les angles de réfraction et d'incidence sont tels que

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \text{constante} = \frac{n_2}{n_1}$$

Remarques.
1. Si le rayon incident est dans le milieu le moins réfringent, le rayon réfracté se rapproche de la normale et il existe toujours :

$$n_1 < n_2 \quad \rightarrow \quad r < i$$

2. Si le rayon incident est dans le milieu le plus réfringent, le rayon réfracté s'écarte de la normale et n'existe que si $i \leqslant \lambda$ angle limite

$$n_1 > n_2 \rightarrow r > i \qquad \text{si} \qquad i \leqslant \lambda \text{ tel que } \sin \lambda = \frac{n_2}{n_1}$$

3. Si i est petit, la dernière loi de Descartes pour la réfraction peut s'écrire

$$n_1 \, i = n_2 \, r$$

□ **Interprétation de ces résultats; principe de Fermat.**
Notion de chemin optique : on remplace souvent en optique la distance géométrique d parcourue par la lumière entre deux points A et B situés dans un milieu d'indice n, par la distance qui serait parcourue pendant le même temps dans le vide ou *chemin optique* noté (AB)

$$\frac{(AB)}{c} = \frac{AB}{c/n} \qquad (AB) = n \, . \, AB$$

Principe de Fermat. — Pour aller d'un point à un autre, la lumière ne peut prendre un chemin quelconque.
Pour aller d'un point à un autre, la lumière emprunte un parcours tel que le chemin optique soit minimal ou maximal.
On peut montrer facilement que les lois de Descartes correspondent bien à l'application de ce principe.
Le chemin optique pour aller de A à B est le même que pour aller de B à A; le principe de Fermat entraîne donc la loi du *retour inverse de la lumière.*

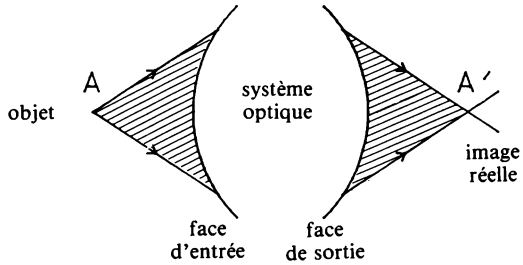
ELEMENTS DES INSTRUMENTS D'OPTIQUE

GENERALITES SUR LES SYSTEMES OPTIQUES

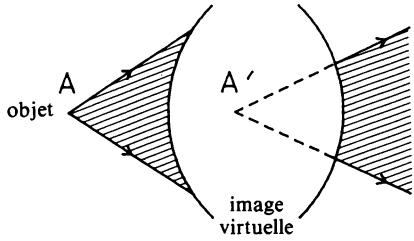
☐ **Définition.** — *Un système optique* est constitué d'une succession de milieux différents. Généralement ces milieux sont isotropes et homogènes et les surfaces de séparation sont de formes géométriques simples pour permettre un usinage facile. Ces surfaces de séparation sont soit des dioptres (avec des réfractions de la lumière) et le système est dit dioptrique, soit des miroirs (avec des réflexions de la lumière) et le système est dit catadioptrique. On distingue la face d'entrée et la face de sortie du système optique.

Image A' d'un objet réel A. — Un objet A réel émet de la lumière vers le système optique. Après réfractions et éventuellement réflexions dans le système optique, les rayons lumineux issus de A, émergent par la face de sortie. Si ces rayons convergent en un point A', A' est appelé image de A à travers le système optique. A et A' sont dits points conjugués par rapport au système optique.

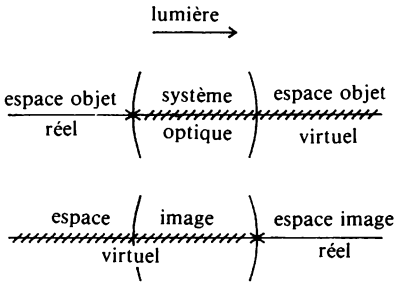
- Si A' est dans l'espace situé après la face de sortie, il est le point de convergence du faisceau émergent et peut être visualisé sur un écran. A' est une *image réelle*.



- Si A' est en avant de la face de sortie, il est le sommet d'un faisceau divergent et ne peut plus être visualisé sur un écran. Toutefois A' peut être observé en plaçant l'œil en arrière du système optique. A' est une *image virtuelle*.



Espace objet et espace image



Suivant sa position par rapport au dioptre d'entrée (ou de sortie), un objet (ou une image) sera réel ou virtuel.
Les rayons réels seront les chemins effectivement suivis par la lumière, leurs prolongements étant appelés rayons virtuels.

□ **Stigmatisme.** — Lorsque tous les rayons dont les supports passent par un point A de l'espace possèdent des émergents par rapport au système optique S dont les supports passent tous par un même point A'; A et A' sont deux points conjugués stigmatiques (ou il y a stigmatisme pour les points A et A').

Condition de stigmatisme. — Pour qu'il y ait stigmatisme, il faut que le chemin optique suivi par tous les rayons pour aller de A à A' ait une valeur constante.
La réalisation de cette condition n'est possible que dans des cas très particuliers. L'exemple des points de Weierstrass, rigoureusement stigmatiques, pour le dioptre sphérique, sera donné dans le paragraphe correspondant.

Stigmatisme approché. — Les récepteurs d'images (œil ou émulsion photographique) sont imparfaits. Ils sont constitués d'éléments sensibles de taille finie. Tant que les rayons issus de l'objet ponctuel convergent dans un volume inférieur ou égal à celui de l'élément sensible, il est impossible de distinguer cette image d'une image rigoureusement ponctuelle donc stigmatique. Le stigmatisme approché, obtenu dans un appareil photographique par exemple, est réalisé si les rayons issus d'un objet ponctuel A passent tous au voisinage immédiat d'un point A' qui est l'image de A par rapport au système optique.

□ **Aplanétisme.** — La condition d'aplanétisme sera réalisée pour un système optique si pour deux points objets voisins A et B situés dans un plan frontal (plan perpendiculaire à l'axe optique), les deux images conjuguées A' et B' sont stigmatiques et dans un plan frontal.

La formule d'Abbe donne la condition de réalisation de l'aplanétisme

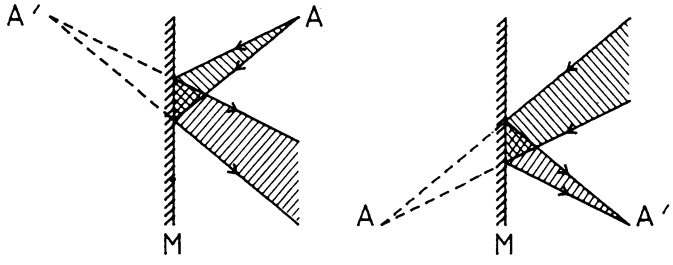
$$n\, y \sin \alpha = n'\, y' \sin \alpha'$$

si n et n' sont les indices des milieux dans lesquels sont AB et A'B', y et y' les grandeurs de AB et A'B' et α et α' les angles que font rayons incident et émergent avec l'axe du système optique.

MIROIRS PLANS

Toute surface plane réfléchissante est un miroir plan.

□ **Construction de l'image d'un objet A.** — Il suffit de tracer deux rayons issus de A qui vont converger, après réflexion sur le miroir M, au point image A'.

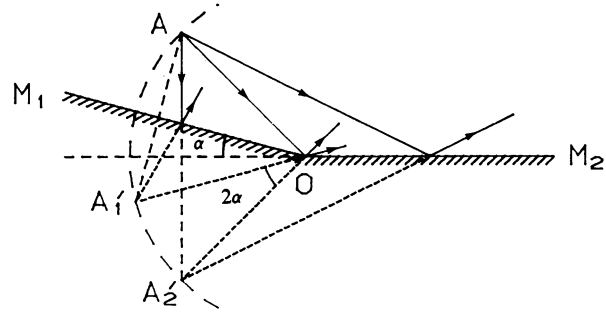


objet réel — objet virtuel

Si A est réel, A' est virtuelle et symétrique de A par rapport au miroir M.
Si A est virtuel, A' est réelle et toujours symétrique de A par rapport à M.
Si l'objet est étendu, son image sera symétrique par rapport à M. Elle ne sera pas superposable à l'objet d'une manière générale.

□ **Stigmatisme.** — Le miroir plan est le seul système réalisant la condition de stigmatisme rigoureux pour tous les points de l'espace. A et A' étant symétriques par rapport à M, tous les rayons issus de A convergent en A' après réflexion.

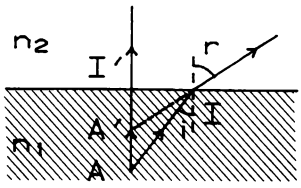
□ **Application : miroir tournant.** — Si M_1 et M_2 représentent les positions d'un même miroir avant et après rotation d'un angle α, les images A_1' et A_2' correspondantes sont telles que l'angle $A_1'OA_2'$ est égal à 2α.



A, A_1' et A_2' sont sur un même cercle de centre O.
Cette propriété est utilisée pour la mesure des petits angles (méthode de Poggendorff, par exemple).

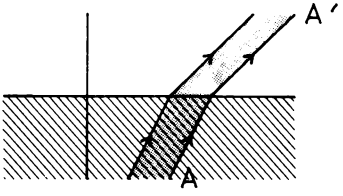
DIOPTRE PLAN - LAME A FACES PARALLELES

☐ **Dioptre plan. Construction de l'image d'un objet AB. —**



$$\frac{IA'}{IA} = \frac{\text{tg } i}{\text{tg } r} \qquad (1)$$

☐ **Stigmatisme.** — Lorsque l'on change de rayon, le point I se déplace et i et r varient de façon à conserver un rapport de sinus constant (loi de Descartes), le rapport des tangentes varie donc et il n'y a pas stigmatisme rigoureux (sauf pour A à l'infini, A' étant lui-même rejeté à l'infini).



Stigmatisme approché. Dans le cas d'angles petits

$$\sin i \simeq \text{tg } i \simeq i$$
$$\sin r \simeq \text{tg } r \simeq r$$

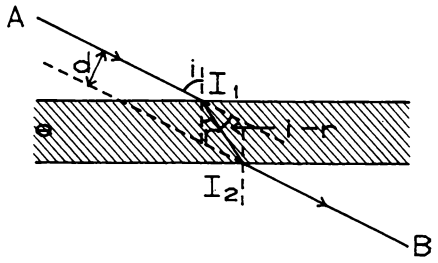
et la loi de Descartes devient $n_1 i = n_2 r$
La relation (1) peut alors s'écrire

$$\overline{IA'} = \overline{IA} \times \frac{i}{r} = \overline{IA} \times \frac{n_2}{n_1}$$

IA' reste constant quelle que soit la valeur de i, donc quelle que soit la position du point d'incidence I. On a alors un stigmatisme approché et A et A' sont donnés par

$$\frac{\overline{IA'}}{n_2} = \frac{\overline{IA}}{n_1}$$

☐ **Lame à faces parallèles.** — Nous avons la succession de deux dioptres plans successifs d'indices inversés et ce cas peut être étudié comme tel.

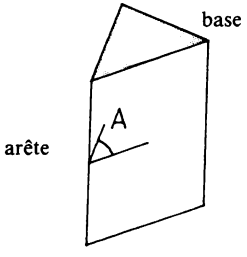


Les rayons AI_1 et BI_2 sont parallèles, le rayon a subi un simple déplacement d.

$$d = \frac{e \sin (i - r)}{\cos r}$$

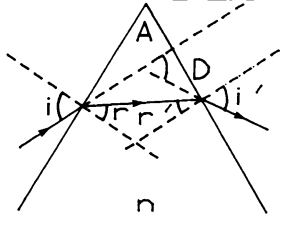
LE PRISME

Le prisme est limité par deux dioptres plans non parallèles dont l'intersection est l'arête.



□ **Marche d'un rayon lumineux monochromatique.** — Nous n'abordons que le cas où le rayon se propage dans une section principale du prisme (plan perpendiculaire à l'arête).

formules du prisme	cas des petits angles
$\sin i = n \sin r$	$i = n\, r$
$\sin i' = n \sin r'$	$i' = n\, r'$
$A = r + r'$	$A = r + r'$
$D = i + i' - A$	$D = (n-1)\, A$



D : angle de déviation du rayon

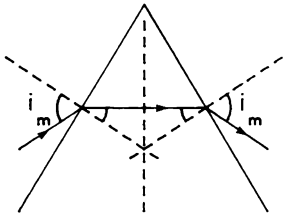
☐ **Etude de la déviation en fonction de l'incidence.** — Différencions les formules du prisme (d A = 0 et dn = 0)

$$\cos i\, di = n \cos r\, dr$$
$$\cos i'\, di' = n \cos r'\, dr'$$
$$0 = dr + dr' \rightarrow dr' = -dr$$
$$dD = di + di'$$

soit $dD = di + di(-\frac{\cos r'}{\cos i'}.\frac{\cos i}{\cos r}) = di(1-\frac{\cos r'}{\cos r}.\frac{\cos i}{\cos i'})$

$dD = O$ pour $i = i'$ et $r = r'$ ($i = -i'$ est à rejeter)

La déviation est alors minimale et $i_m = i'_m$; le rayon interne est perpendiculaire au plan bissecteur.



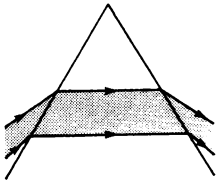
Application. — Dans le cas de la déviation minimale

$$D_m = 2\, i_m - A \quad ; \quad \sin i_m = n \sin\frac{A}{2}$$

$$\text{soit } n = \frac{\sin\frac{A + D_m}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

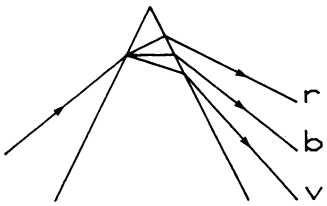
Cette formule permet de calculer avec une bonne précision l'indice d'un verre taillé en prisme.

☐ **Stigmatisme.** — Le prisme est une succession de deux dioptres plans et le stigmatisme ne sera réalisé que pour un objet à l'infini.
Un faisceau cylindrique va donc simplement être dévié par un prisme.



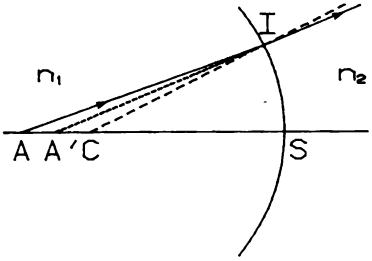
☐ **Dispersion de la lumière blanche.** — L'angle de déviation d'un rayon lumineux dépend de l'indice n de la substance dans laquelle le prisme est taillé. La valeur de l'indice varie avec la longueur d'onde de la lumière utilisée suivant la formule de Cauchy $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$

La déviation varie dans le même sens que n et donc en sens inverse de λ. L'angle de déviation sera donc plus important pour la lumière violette ($\lambda_v \simeq 400$ nm) que pour la lumière rouge ($\lambda_r \simeq 750$ nm).
Un prisme recevant un rayon de lumière blanche (contenant toutes les radiations lumineuses comprises entre 400 et 800 nm environ) sépare la lumière en ses diverses composantes; on dit qu'il disperse la lumière blanche. Cette propriété est utilisée dans les spectrographes à prisme qui servent à analyser la lumière ou de base aux monochromateurs.



DIOPTRE SPHERIQUE

Un dioptre sphérique sépare deux milieux d'indices différents par une surface sphérique.



C : centre du dioptre CS : axe du dioptre
S : sommet du dioptre A et A' : points conjugués par rapport au dioptre.

☐ **Stigmatisme rigoureux.**
1. Sommet S : S est sa propre image.
2. Centre C : C est également sa propre image.
3. Points de Weierstrass : on montre que pour le couple W et W' défini par

$$\overline{CW} = -\frac{n_2}{n_1}\overline{CS}$$

$$\overline{CW'} = -\frac{n_1}{n_2}\overline{CS}$$

on a un stigmatisme rigoureux.
W et W' divisent harmoniquement le segment SS' (S' est le symétrique de S par rapport à C).

☐ **Stigmatisme approché.** — Il y a stigmatisme approché au voisinage des points pour lesquels on avait un stigmatisme rigoureux.
On montre également que si I est proche de S, on a un stigmatisme approché, c'est-à-dire si A envoie seulement des rayons paraxiaux sur le dioptre.

☐ **Position de l'image A' d'un objet A.**

Nous avons $n_1 \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n_2 \frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}$

soit $n_1 \frac{\overline{SA} - \overline{SC}}{\overline{SA}} = n_2 \frac{\overline{SA'} - \overline{SC}}{\overline{SA'}}$

si les rayons sont paraxiaux ($\overline{SA} \simeq \overline{IA}$)

soit $\boxed{\frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}}$

si toutes les valeurs algébriques sont comptées positivement dans le sens de propagation de la lumière incidente.
C'est la formule de conjugaison du dioptre (valable seulement dans les conditions de stigmatisme approché).

☐ **Foyers.**

1. Foyer image : si l'objet A s'éloigne vers l'infini à gauche, l'image A' tend vers un point F' appelé foyer image donné par ($SA = \infty$) :

$$\overline{SF'} = -\frac{n_2}{n_1 - n_2}\overline{SC}$$

2. Foyer objet : si A est placé au foyer objet, l'image est rejetée à l'infini à droite

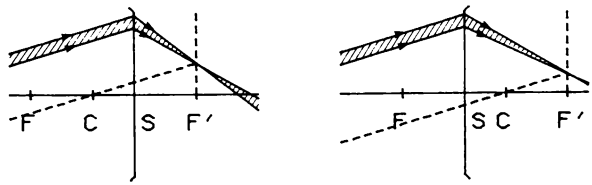
$$\overline{SF} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{SC}$$

3. Formules : on tire des deux précédentes relations

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{SF'}} = \frac{f}{f'} = -\frac{n_1}{n_2}$$

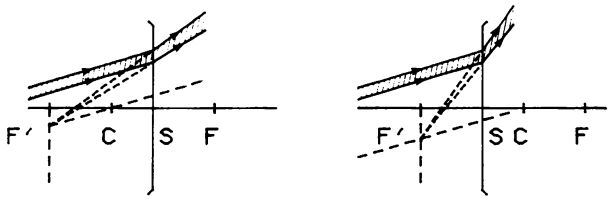
$$\text{et } \overline{SF} + \overline{SF'} = f + f' = \overline{SC} = R$$

4. Constructions géométriques (pinceau de lumière parallèle)



$n_1 > n_2$ $n_1 < n_2$

dioptre convergent



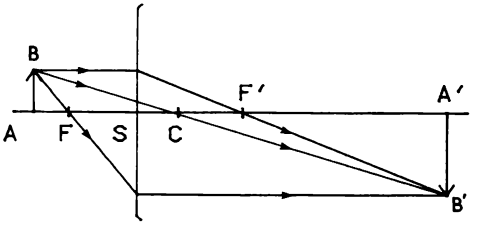
$n_1 < n_2$ $n_1 > n_2$

dioptre divergent

Ce qu'il faut retenir :
Tout rayon qui passe par le centre C n'est pas dévié.
Tout faisceau de rayons parallèles converge (réellement ou virtuellement) en un même point du plan focal image (plan perpendiculaire à l'axe et contenant F') obtenu en utilisant le rayon parallèle qui passe par C.
Tout faisceau de rayons provenant d'un même point du plan focal objet (plan perpendiculaire à l'axe et contenant F) émerge en un faisceau de rayons parallèles dont la direction est obtenue en utilisant le rayon qui passe par C.

☐ **Image d'un objet AB perpendiculaire à l'axe.**
• **Conditions de Gauss** (qui satisfont aux conditions de stigmatisme approché) : si un objet peu important est situé dans un plan perpendiculaire à l'axe et si ses points n'envoient que des rayons paraxiaux, l'image est également située dans un plan perpendiculaire à l'axe.

• **Construction :**



$n_1 < n_2$

Dans le cas de la figure, l'image est réelle et renversée. 3 rayons sont tracés à partir de B pour aboutir à B' :
1. Le rayon qui passe par C et qui n'est pas dévié.
2. Le rayon incident parallèle à l'axe et qui émerge en passant par F'.
3. Le rayon qui passe par F et sort parallèlement à l'axe.

□ **Grandissement.**

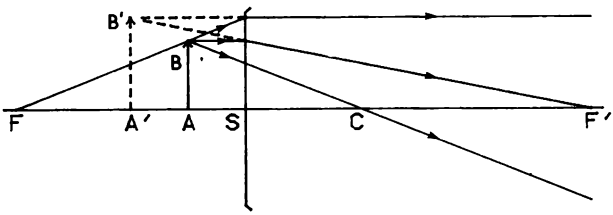
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

C'est un grandissement linéaire.

Exercice. — *Caractériser l'image donnée par un dioptre convergent d'indice n = 1,5 et de rayon R = 5 cm, d'un objet AB de 3 cm de haut situé à 2,5 cm en avant de son sommet. Tracer la marche d'un pinceau lumineux issu de B.*

La formule du dioptre appliquée à l'exercice nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{\overline{SA}} - \frac{n}{\overline{SA'}} = \frac{1-n}{\overline{SC}}$$



Si $A \to \infty$, $A' \to F'$

$$\overline{SF'} = \frac{n}{1-n}\overline{SC} = 15 \text{ cm}$$

Si $A' \to \infty$, $A \to F$

$$\overline{SF} = \frac{1}{1-n}\overline{SC} = -10 \text{ cm}$$

Pour l'objet AB

$$\frac{n}{\overline{SA'}} = \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{n-1}{\overline{SC}} = \frac{1}{-2,5} + \frac{0,5}{5} = -\frac{3}{10}$$

$$\text{et } SA' = -\frac{1,5 \times 10}{3} = -5 \text{ cm}$$

L'image est donc virtuelle.

$$\text{Le grandissement } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB'}} = \frac{1}{n}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{1}{1,5} \cdot \frac{-5}{-2,5} = \frac{4}{3}$$

$$\text{soit } \overline{A'B'} = 4 \text{ cm}$$

l'image est de même sens que AB et de hauteur 4 cm.
La construction géométrique nécessite l'utilisation des foyers.

LENTILLES MINCES

☐ **Définitions.** — Une lentille est limitée par deux surfaces de révolution dont les axes sont confondus. La lentille sera mince si l'épaisseur e est petite devant le rayon de courbure des faces et telle que les sommets S_1 et S_2 sont pratiquement confondus avec le centre optique.

• On distingue les *lentilles à bord mince* (convergentes)

biconvexe — plan-convexe — ménisque convergent — symbole

et les *lentilles à bord épais* (divergentes)

biconcave — plan-concave — ménisque divergent — symbole

Une lentille étant une succession de deux dioptres, le *stigmatisme approché* sera réalisé dans les conditions de Gauss.

☐ **Image d'un objet ponctuel A.**
A_1 est l'image de A par rapport au premier dioptre,
A' est l'image de A_1 par rapport au second dioptre,
on peut donc écrire (si n est l'indice de la lentille placée dans l'air d'indice $\simeq 1$)

$$\frac{1}{\overline{S_1A}} - \frac{n}{\overline{S_1A_1}} = \frac{1-n}{\overline{S_1C_1}} \qquad (1)$$

$$\frac{n}{\overline{S_2A_1}} - \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{n-1}{\overline{S_2C_2}} \qquad (2)$$

Si la lentille est mince, S_1 et S_2 peuvent être confondus en O, centre de la lentille, soit $\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = (n-1)(\frac{1}{\overline{OC_2}} - \frac{1}{\overline{OC_1}})$ (3)

Si A est à l'infini A' est en F', foyer image du dioptre

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1)(\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OC_2}})} \text{ ou } \boxed{\frac{1}{f'} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})} \quad (4)$$

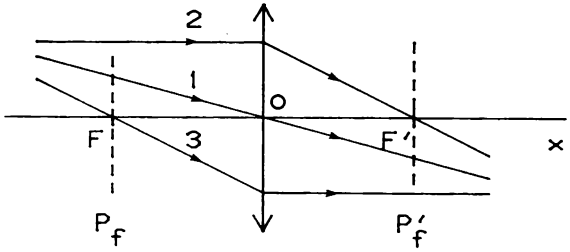
(R_1 et R_2 sont en mesure algébrique).

La formule (3) devient donc

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}} \text{ ou } \boxed{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}}$$

formule des lentilles minces avec origine au centre de la lentille.

□ **Eléments de la lentille.**

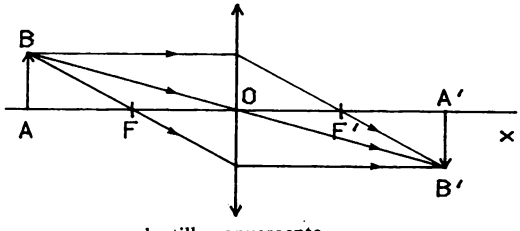


F foyer objet P_f plan focal objet O centre optique de la lentille
F' foyer image P'_f plan focal image.

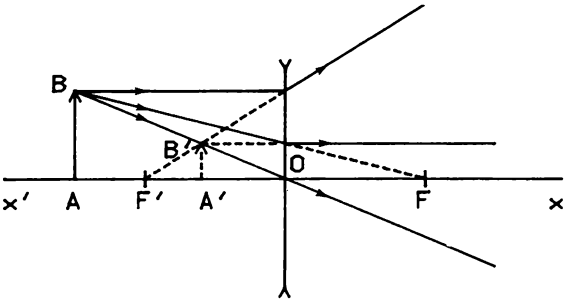
Si les deux milieux extrêmes sont identiques, $\overline{OF'} = -\overline{OF}$

Rayons lumineux particuliers :
1. tout rayon qui passe par le centre optique n'est pas dévié;
2. tout rayon incident parallèle à l'axe émerge de la lentille en passant par F';
3. tout rayon incident qui passe par F, émerge en restant parallèle à l'axe.

□ **Construction de l'image d'un objet AB** perpendiculaire à l'axe. — Deux des trois rayons particuliers peuvent être utilisés.



lentille convergente



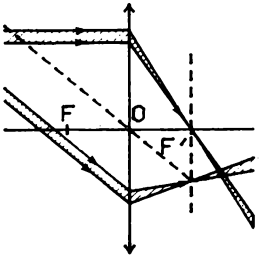
lentille divergente

D'autres cas de figures peuvent se produire.
L'image peut être - réelle ou virtuelle
- dans le même sens que AB ou renversée.
Sa grandeur est donnée par le **grandissement** :

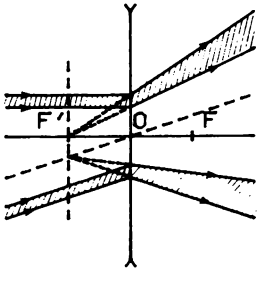
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

(obtenu en utilisant les triangles semblables).

□ **Trajet d'un faisceau de rayons parallèles.** — Tout faisceau de rayons parallèles converge en un même point du plan focal *image*.
De la même façon, tous les rayons qui proviennent d'un même point du plan focal *objet* émergent en un faisceau de rayons parallèles.
Pour la construction, on utilise le rayon parallèle au faisceau qui passe par le centre optique de la lentille et qui n'est donc pas dévié.



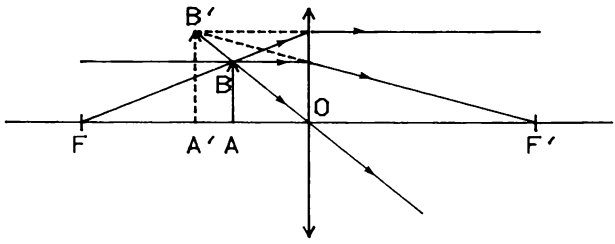
lentille convergente



lentille divergente

Exercice. — *Une lentille convergente de 30 cm de distance focale donne l'image d'un objet AB placé à 10 cm de la lentille sur son axe optique; l'objet mesure 4 cm.*
Quelle sont la nature, la position et la grandeur de l'image A'B' ? Faire le schéma correspondant.

1. Schéma :



Sur le schéma, on voit que l'image est virtuelle (elle appartient à l'espace objet), qu'elle est située à 15 cm de la lentille, qu'elle est de même sens que AB et que sa grandeur est de 6 cm.

2. Calcul algébrique : on utilise la formule des lentilles minces

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

soit $\dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}} + \dfrac{1}{\overline{OA}}$ avec $\overline{OA} < 0$

$$= \frac{1}{30} - \frac{1}{10} = -\frac{20}{300} = -\frac{1}{15} \quad OA' = -15 \text{ cm}$$

OA' est négatif ce qui indique que l'image est virtuelle.

Nous avons $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

soit $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 4 \cdot \dfrac{-15}{-10} = 6 \text{ cm}$

□ **Vergence; association de lentilles minces accolées.** — On appelle *vergence* d'une lentille mince $V = \dfrac{1}{f'}$ qui s'exprime en dioptries ou m^{-1}.

$V > 0$ si la lentille est convergente, $V < 0$ si la lentille est divergente.

L'association de lentilles minces accolées de même axe optique est équivalente à une lentille mince unique de vergence égale à la somme algébrique de celles des lentilles.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$$

SYSTEMES CENTRES

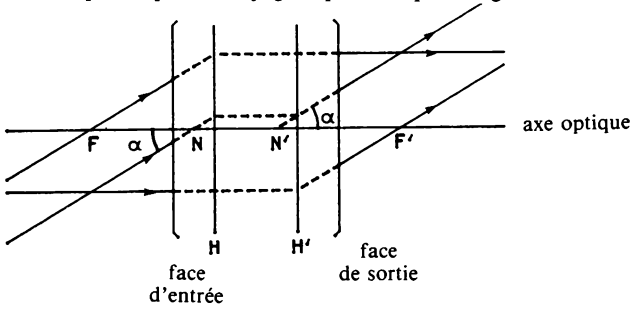
On appelle système centré, un ensemble de dioptres qui possèdent le même axe de révolution. Un ensemble de deux lentilles espacées ou une lentille épaisse sont des exemples de systèmes centrés.

□ **Définitions.**

Foyer objet : point de l'axe qui a son image conjugée par rapport au système centré rejetée à l'infini.

Foyer image : image conjuguée (située sur l'axe) d'un objet rejeté à l'infini.

Plans principaux : couple de plans conjugués pour lesquels le grandissement est + 1.



H = plan principal objet H' plan principal image

H est défini comme l'ensemble des points d'intersection des rayons incidents passant par F et des émergents parallèles à l'axe correspondants.
H' est défini comme l'ensemble des points d'intersection des rayons incidents parallèles à l'axe et des émergents qui passent par F' correspondants.

Remarque : les pointillés représentent des rayons fictifs de construction. Seuls sont réels les rayons incidents et émergents.
Les foyers et les plans principaux suffisent pour caractériser un système centré.

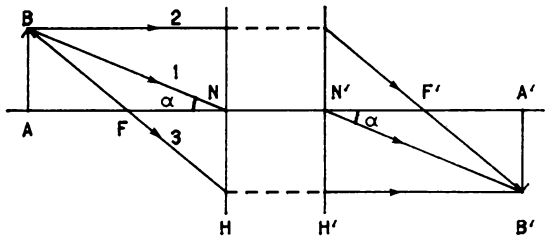
- **Points nodaux.** — couple de points conjugués N et N' pour lesquels le grandissement angulaire est égal à + 1.

- **Relations entre ces points.**

$$\overline{HH'} = \overline{NN'} \quad , \quad \overline{FN} = \overline{H'F'} \quad , \quad \overline{F'N'} = \overline{HF}$$

Si les milieux extrêmes sont identiques , les points nodaux sont confondus avec les points principaux.

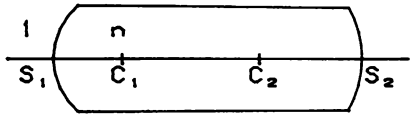
□ **Construction de l'image d'un objet AB.** — Nous prenons comme exemple une lentille épaisse pour laquelle les milieux extrêmes sont de l'air ($n \simeq 1$ et N, N' sont confondus avec H, H').
Nous utilisons les trois rayons particuliers que nous avons recontrés pour les lentilles minces.



Dans l'exemple considéré, l'image est réelle et renversée.

Exercice. — *Une lentille épaisse est formée par un cylindre de verre limité par deux dioptres sphériques de même axe, de sommets S_1 et S_2 et de centres C_1 et C_2 (figure) avec*

$$S_1C_1 = R_1 = 3 \text{ cm}$$
$$S_2C_2 = R_2 = 4{,}5 \text{ cm}$$
$$S_1S_2 = r = 13{,}5 \text{ cm}$$
$$n = 1{,}5$$



1. Détermination des foyers et des plans principaux du système.
a) Calculer les distances focales des deux dioptres sphériques S_1 et S_2.
b) Tracer un rayon incident parallèle à l'axe; en déduire la position du foyer image et du plan principal image de la lentille épaisse. En traçant un rayon émergent parallèle à l'axe trouver la position du foyer objet et du plan principal objet. En déduire les distances focales de la lentille épaisse.

2. Un objet AB est situé à 9 cm en avant de S_1; déterminer A'B'. Tracer la marche d'un pinceau lumineux issu de B.

1) a) Pour 2 points conjugués A et A' par rapport au dioptre de sommet S_1, on a la relation :

$$\frac{1}{\overline{S_1A}} - \frac{n}{\overline{S_1A'}} = \frac{1 - n}{\overline{S_1C_1}}$$

A' sera en F_1' si $S_1A \to \infty$ alors $-\dfrac{n}{\overline{S_1F_1'}} = \dfrac{1-n}{\overline{S_1C_1}}$

ou $\overline{S_1F_1'} = f_1' = -\overline{S_1C_1}\dfrac{n}{1-n} = 3 \times \dfrac{1{,}5}{0{,}5} = 9$ cm

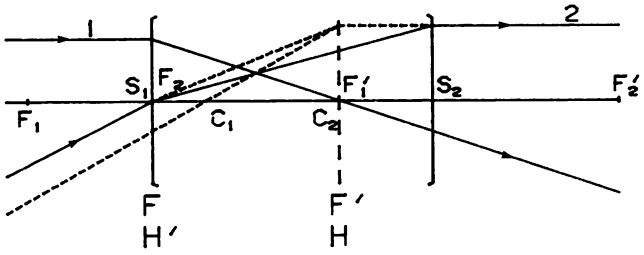
La distance focale image du premier dioptre est 9 cm (dioptre convergent).
Une formule identique peut être utilisée pour le second dioptre

$$f_2' = -\overline{S_2C_2}\frac{1}{n-1} \text{ avec } \overline{S_2C_2} = -4{,}5 \text{ cm}$$

$$= +4{,}5 \times \frac{1{,}5}{0{,}5} = +9 \text{ cm}$$

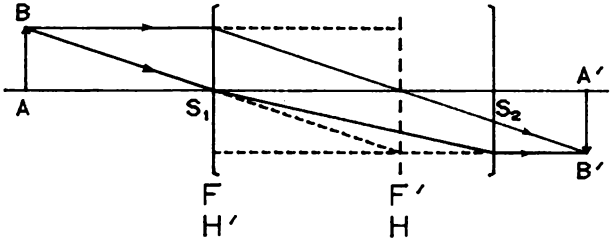
La distance focale image du second dioptre est + 9 cm (dioptre convergent).

b) Constructions géométriques



F_1' est confondu avec C_2 ainsi que F_2 avec S_1.
Le rayon (1) parallèle à l'axe coupe l'axe optique en F_1' (ou C_2); passant par son centre, il n'est pas dévié par le second dioptre. Le foyer image F' de la lentille épaisse est donc situé en C_2.
Le plan principal image H' se trouve à l'intersection des rayons incident et émergent, il contient donc S_1.
Le rayon (2) émerge parallèlement à l'axe, on peut le construire en utilisant le principe du retour inverse de la lumière.
On en déduit que F est en S_1 et H en C_2.
La distance focale de la lentille est $\overline{H'F'} = \overline{S_1C_2} = 9$ cm.

2)



A'B' est réelle de même grandeur que AB et renversée; elle est située à 9 cm de C_2 (triangles semblables) et à 4,5 cm de S_2.

L'OEIL

Seules sont rappelées dans ce paragraphe les notions essentielles, indispensables pour comprendre les instruments d'optiques.

□ **Oeil normal ou emmétrope.** — Nous ne considérons que l'œil «réduit» formé d'une lentille convergente de vergence variable *(le cristallin)* et d'une surface sensible *(la rétine)* qui tapisse le fond de l'œil.
Pour voir nettement tous les objets, il faut que le système optique constitué par l'œil en donne des images situées sur la rétine.

Au repos, la vergence du cristallin est minimale, il donne sur la rétine l'image du point le plus éloigné que l'œil puisse voir nettement; c'est le *punctum remotum* (PR) situé à la distance maximale de vision distincte (distance infinie pour un œil normal).

Si l'objet est rapproché, le cristallin doit *augmenter sa vergence* pour que l'image se forme encore sur la rétine : c'est le phénomène *d'accommodation* dû à plusieurs causes (augmentation du rayon de courbure des dioptres constituant le cristallin et de son indice de réfraction). Lorsque ce phénomène est maximal, le cristallin donne sur la rétine l'image d'un objet le plus proche que l'œil puisse voir nettement; c'est le *punctum proximum* (PP) situé à la distance minimale de vision distincte (environ 15 cm généralement).

□ **Amplitude d'accommodation.** — C'est la valeur absolue de variation de puissance de l'œil lorsqu'il passe de l'observation d'un objet situé à la distance maximale de vision distincte Δ (il est au repos) à celle d'un objet situé à la distance minimale de vision distincte δ (accommodation maximale).

Amplitude d'accommodation $A = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\Delta}$ (en dioptries).

Ces distances sont comptées positivement quand les points sont situés en avant de l'œil.

Pour un œil normal $\delta \simeq 0{,}15$ m et $\Delta = \infty$ soit $A \simeq 7$ dioptres.

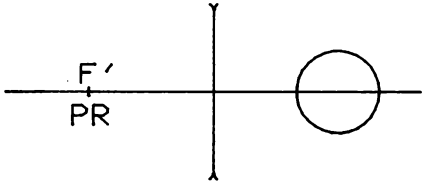
□ **Presbytie : variation de l'accommodation avec l'âge.** — La presbytie est une *diminution* de l'amplitude d'accommodation de l'œil due à une diminution de la souplesse du cristallin. Elle se traduit par une augmentation de la distance minimale de vision distincte (éloignement du PP de l'œil), la distance maximale de vision distincte restant inchangée.
L'œil devient presbyte en vieillissant.

Correction : Pour la vision rapprochée, on doit utiliser des *verres convergents* qui vont augmenter la vergence du cristallin.

□ **Défauts de l'œil.** — Pour que le sujet ne se fatigue pas, il est particulièrement important que l'œil observe à l'infini sans accommoder. Certains défauts de l'œil déplacent le PR qui ne se trouve plus à l'infini. Il faut alors le renvoyer à l'infini en adjoignant à l'œil un verre correcteur donnant d'un objet à l'infini une image au PR. *Son foyer image doit donc être situé au PR.*

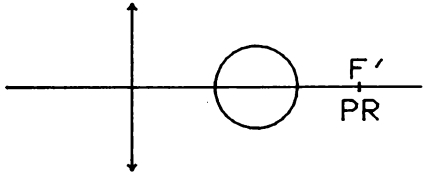
• **œil myope** : c'est un œil *trop convergent.* Le PR est à une distance finie et l'œil ne peut voir nettement à l'infini. L'image d'un objet situé à l'infini se forme en avant de la rétine.

Correction : on diminue la vergence du cristallin en utilisant un *verre divergent* tel que son foyer image soit au PR de l'œil.



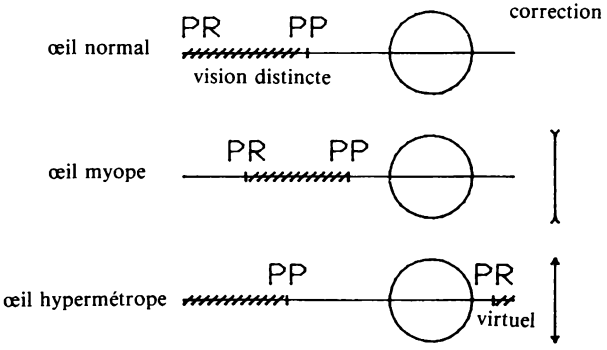
• **œil hypermétrope** : c'est un œil *pas assez convergent.* L'œil doit accommoder pour voir nettement un objet situé à l'infini. Au repos son image se forme en arrière de la rétine. Le *PR virtuel* est en arrière de l'œil.

Correction : on augmente la vergence du cristallin en utilisant un *verre convergent* tel que son foyer image soit au PR de l'œil.



• **astigmatisme** : même dans les conditions de Gauss, l'œil astigmate donne plusieurs images d'un objet.
Cela est dû au fait que le cristallin n'est pas formé de dioptres sphériques. Le système n'est plus de révolution et la correction consiste à utiliser une ou plusieurs lentilles plan-cylindriques.

☐ **Champ de vision distincte.** — Le schéma suivant résume les paragraphes précédents pour l'œil normal, myope ou hypermétrope.



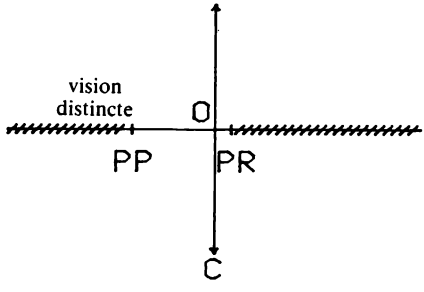
Exercice. — *Un œil est assimilé à une lentille convergente simple. Il possède une amplitude d'accommodation de 6 dioptries. Son punctum proximum est à 1 m en avant du cristallin.*
1. Où se trouve son punctum remotum ?
2. De quel défaut cet œil est-il affecté ?
3. On corrige ce défaut en plaçant une lentille simple à 2 cm en avant du cristallin; donner les caractéristiques de cette lentille (nature, distance focale, vergence).
4. Où se trouve alors le punctum proximum de cet œil corrigé ?
5. Si la lentille est plan-sphérique et d'indice 1,5, quel est le rayon de courbure de sa face sphérique ?

1. L'amplitude d'accommodation :

$$A = \frac{1}{d} - \frac{1}{\Delta} \quad \text{avec } d = 1 \text{ m et } A = 6 \text{ dioptries}$$

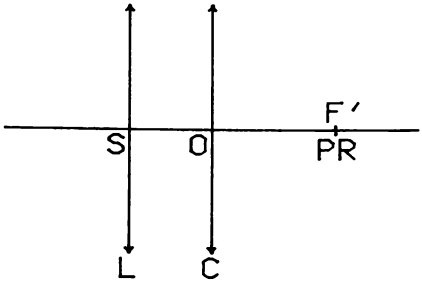
$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{d} - A = 1 - 6 = -5 \text{ ; soit } \Delta = -0{,}2 \text{ m}$$

Le PR est virtuel ($\Delta < 0$), il est situé à 20 cm en arrière du cristallin (C).



2. Cet œil est hypermétrope, sa vergence est trop faible.

3. La lentille L doit être telle que son foyer image soit confondu avec le PR de l'œil de façon à le renvoyer à l'infini.



Elle doit donc être convergente
avec f' = 20 + 2 = 22 cm

soit une vergence $V = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0{,}22} = 4{,}5$ dioptries.

4. Le punctum proximum de cet œil corrigé ou PP' est le conjugué de PP par rapport à la lentille L.

$$\frac{1}{\overline{SPP}} - \frac{1}{\overline{SPP'}} = \frac{1}{\overline{SF'}}$$

soit $\frac{1}{\overline{SPP'}} = \frac{1}{\overline{SPP}} - \frac{1}{\overline{SF'}} = \frac{1}{0{,}98} - \frac{1}{0{,}22}$ et $\overline{SPP'} \simeq -0{,}284$ m

Le punctum proximum de l'œil corrigé se trouve alors à (28,4 + 2) = 30,2 cm en avant du cristallin.

5. Pour cette lentille

$$\frac{1}{\overline{SF'}} = (n-1)\frac{1}{\overline{SC}} \quad \text{soit } \overline{SC} = \overline{SF'}(n-1) = 22 \times (1{,}5-1) = 11 \text{ cm.}$$

Le rayon de courbure de la lentille plan-convexe utilisée doit être de 11 cm.

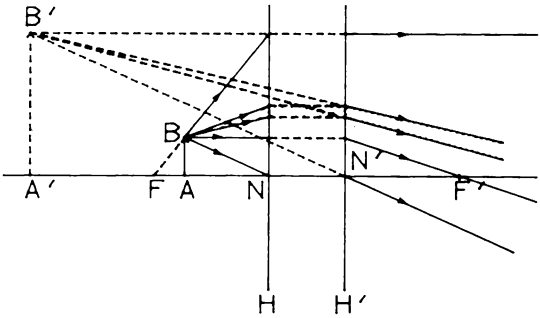
LES INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Ce sont généralement des systèmes centrés plus ou moins complexes. Ils sont adaptés à un usage particulier (vision rapprochée, vision éloignée, lentille de projection ou d'appareil photographique).

LOUPE

C'est un instrument d'optique qui donne d'un objet réel une image virtuelle dont le diamètre apparent est plus grand que celui de l'objet.

□ **Construction de l'image, marche d'un faisceau.** — La loupe est souvent une lentille épaisse de quelques centimètres de distance focale.
L'objet à examiner est placé entre la lentille et son plan focal objet.
Pour l'œil, tout se passe comme s'il regardait un objet A'B'.



□ **Mise au point.** — Mettre au point une loupe, c'est amener l'image dans le champ de vision de l'œil entre le punctum proximum et le punctum remotum.

Le petit déplacement de la loupe pendant lequel l'image reste nette, s'appelle la latitude de mise au point.

Exercice. — *Calculer la latitude de mise au point d'une loupe constituée par une lentille mince convergente de 3 cm de distance focale utilisée par un œil normal dont la distance minimale de vision distincte est de 15 cm. L'œil est placé au foyer image de la loupe.*

Quand l'œil n'accommode pas, l'image doit être rejetée à l'infini et l'objet A_1 est alors en F (foyer objet de la loupe).
Quand l'œil accommode au maximum, l'image doit être à 15 cm de l'œil donc à 12 cm de la lentille. L'objet A_2 est tel que

$$\frac{1}{-12} - \frac{1}{\overline{OA_2}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = -\frac{5}{12}$$

soit $\overline{OA_2} = -2{,}4$ cm

La latitude de mise au point est donc

$$l = |\overline{OA_1} - \overline{OA_2}| = 3 - 2{,}4 = 0{,}6 \text{ cm}$$

□ **Puissance. — La puissance d'une loupe est le rapport de l'angle α' sous lequel on voit l'image de l'objet à travers la loupe à la grandeur AB de l'objet.**

$$\boxed{P = \frac{\alpha'}{AB}}$$

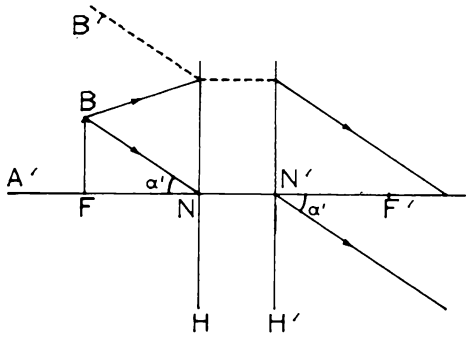
Dans le cas où l'image est rejetée à l'infini (l'œil n'accommode pas), on définit la puissance nominale de la loupe :

$$\frac{\alpha}{AB} \simeq \frac{1}{FN} = \frac{1}{f'}$$

(α est un angle petit car nous sommes toujours dans l'approximation de Gauss et $\alpha \simeq \text{tg } \alpha$).

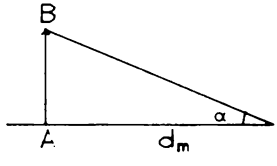
$$\boxed{P_n = \frac{1}{f'}} \text{ (en dioptries)}$$

La puissance nominale d'une loupe est égale à sa vergence.



□ **Grossissement.** — C'est le rapport de l'angle α' sous lequel on voit l'image de l'objet à travers la loupe à l'angle α sous lequel on voit l'objet à l'œil nu, à la distance minimale de vision distincte

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad \text{(nombre sans unité)}$$



$$\alpha = \frac{AB}{d_m} \text{ soit } G = \frac{\alpha'}{AB} . d_m = P.d_m$$

$$\boxed{G = P.d_m}$$

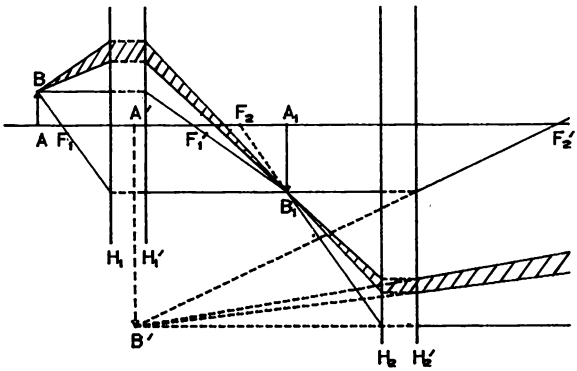
Le grossissement commercial correspond à un grossissement pour $d_m = 0{,}25$ m

soit $$\boxed{G_c = \frac{P}{4}}$$

MICROSCOPE

C'est un instrument d'optique destiné à l'observation d'objets très petits. Il se compose de deux systèmes convergents; un oculaire, placé du côté de l'œil, et un objectif, placé du côté de l'objet.

☐ **Construction de l'image et marche des rayons.** — L'objet AB est placé un peu en avant du foyer objet de l'objectif (F_1). Ce dernier en donne une image réelle renversée et l'oculaire est alors utilisé comme loupe.
L'image finale est donc virtuelle et *renversée*.



☐ **Définitions.**

• **Mise au point :** la latitude de mise au point est très faible (10^{-5} m).

• **Puissance :** la définition est la même que pour la loupe

$$P = \frac{\alpha'}{AB} = \frac{\alpha'}{A_1B_1} \times \frac{A_1B_1}{AB}$$

$$\boxed{P = p \times \gamma}$$

où p est la puissance de l'oculaire et γ le grandissement de l'objectif.

Dans le cas où A'B' est à l'infini, A_1 est en F_2.

Alors $p = \frac{1}{f_2'}$ et $\gamma = \frac{F_1'F_2}{f_1'}$

$F_1'F_2 = \Delta$ est l'intervalle optique du microscope

$$\boxed{P = \frac{\Delta}{f_1'.f_2'}}$$

☐ **Grossissement.** — Comme pour la loupe

$$\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = P.d_m}$$

Exercice. — *Calculer la puissance nominale d'un microscope dont l'objectif a 2,5 mm de distance focale, l'oculaire a 2 cm de distance focale et l'intervalle optique est de 16 cm.*
Quel est son grossissement pour un œil dont la distance minimale de vision distincte est de 20 cm ?

Toutes les longueurs doivent être exprimées en m : $f_1' = 2{,}5.10^{-3}$ m, $f_2' = 2.10^{-2}$ m, $\Delta = 16.10^{-2}$ m et $d_m = \frac{1}{5}$m

$$P = \frac{16.10^{-2}}{2{,}5.10^{-3} \times 2.10^{-2}} = 3200 \text{ dioptries}$$

$$\text{et } G = 3200 \times \frac{1}{5} = 640$$

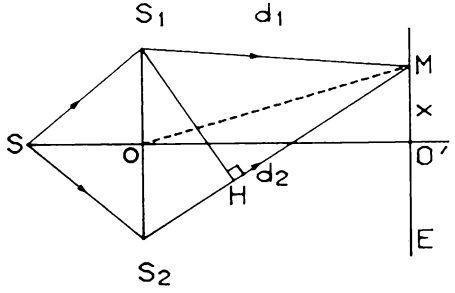
L'image est grossie 640 fois dans ce cas.

INTERFERENCES LUMINEUSES

Les interférences optiques sont un cas particulier du phénomène général étudié dans le chapitre sur les mouvements vibratoires. Elles permettent de montrer la nature vibratoire ou ondulatoire de la lumière. Lorsque deux ondes lumineuses arrivent en un même point, les champs magnétiques et électriques qui les caractérisent vont s'ajouter (principe de superposition).

Le phénomène n'est simple que si les deux ondes sont monochromatiques et de même longueur d'onde.

□ **Calcul de la différence de marche** δ. — Les interférences lumineuses ne sont observées que lorsque les deux ondes sont cohérentes. Deux sources cohérentes peuvent être obtenues en créant deux sources secondaires à l'aide d'un dispositif expérimental particulier (décrit plus loin).



$S_1S_2 = a$

$OO' = D$

$D >> a$

S source principale, S_1 et S_2 sources secondaires cohérentes.
L'écran E, perpendiculaire à SO', permet l'observation du phénomène d'interférences.
Les deux vibrations qui arrivent en M sont

$$y_1 = y_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right)$$

$$y_1 = y_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right)$$

La vibration résultante a comme amplitude

$$A = 2y_0 \cos\frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)$$

$d_2 - d_1 = \delta$ est la différence de marche entre les deux ondes.
Puisque $D >> a$, $d_2 - d_1 \simeq H S_2$

Les triangles S_1S_2 H et M OO' sont semblables et

$$\frac{S_1S_2}{OM} = \frac{S_2H}{O'M} \qquad \text{soit avec OM} \simeq D$$

$$\frac{a}{D} = \frac{\delta}{x} \qquad \text{soit} \quad \boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

☐ **Calcul de l'interfrange.** — Les franges brillantes sont telles que

$$\delta = k\lambda$$

La frange centrale (k = 0) est toujours brillante si le milieu est isotrope. Les franges sombres sont telles que

$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Pour deux franges brillantes consécutives, δ augmente de λ

$$\text{soit } \lambda = \frac{ax}{D} \text{ ou } x = \frac{\lambda D}{a}$$

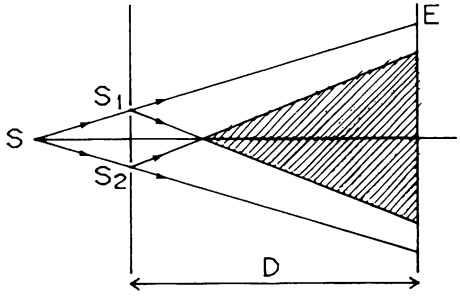
Cette distance x ou i est la distance entre deux franges consécutives (interfrange)

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

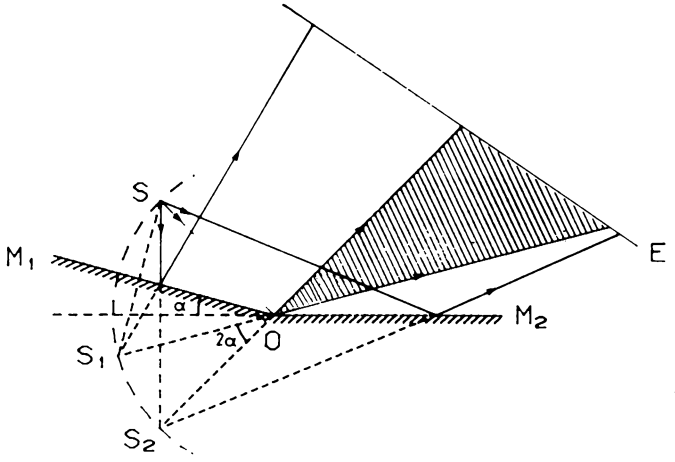
Ces interférences sont obtenues dans toute la région de l'espace où deux rayons émis de S_1 et S_2 peuvent se rencontrer. Elles sont dites *non localisées*.

☐ **Dispositifs expérimentaux.**

1. Trous d'Young. Un écran est percé de deux fentes fines et parallèles à une fente source située en avant.

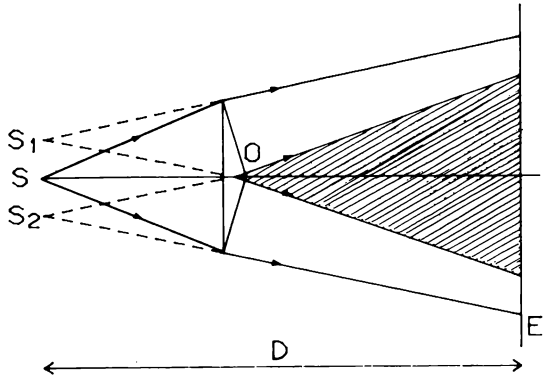


2. Miroir de Fresnel. Deux miroirs faisant un angle α petit sont éclairés par une fente source parallèle à l'arête du dioptre formé.



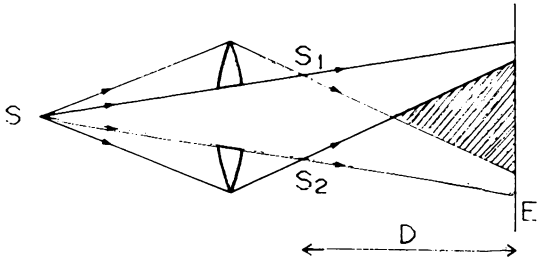
OS = l
OE = d
$D \simeq l + d$
$a \simeq 2\alpha\, l$

3. Biprisme de Fresnel. Deux prismes d'angle au sommet très petits sont accolés par la base.



La déviation due à un prisme est $\alpha = (n-1)A$; si A est l'angle du prisme on a alors $a = 2(n-1)A \times SO$.

4. Bilentilles de Billet. Une lentille mince convergente est sciée en deux et les moitiés sont légèrement écartées. Les formules des lentilles minces permettent de calculer a et D.

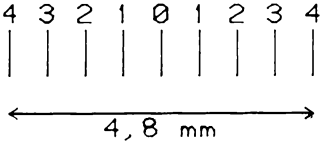


☐ **Franges localisées.** — Si dans les expériences précédentes nous remplaçons la source ponctuelle par une source étendue, chaque point de la source va donner son propre système d'interférences. On montre que dans ce cas, les franges sont alors localisées pour une certaine distance D.

D'autres systèmes de franges localisées peuvent être obtenus avec d'autres dispositifs expérimentaux (anneaux à l'infini d'une lame à faces parallèles, franges du coin d'air).

☐ **Phénomènes en lumière polychromatique.** — Pour deux radiations de longueurs d'onde différentes, l'interfrange est différente. Les systèmes d'interférence de deux couleurs vont se superposer.
La frange centrale, pour les deux radiations, correspond à $\delta = 0$ et les deux franges sont brillantes. Ailleurs, il y aura superposition de franges brillantes et de franges quelconques.
En lumière blanche, toutes les radiations vont avoir leur propre système de franges et seule la frange centrale, qui contient le maximum de toutes les longueurs d'onde, sera blanche. Elle sera bordée de franges de couleurs. Assez loin du centre, on obtient un blanc *d'ordre supérieur*. L'analyse de ce blanc d'ordre supérieur à l'aide d'un spectroscope fait apparaître des cannelures sombres correspondant à des radiations manquantes du spectre (radiations pour lesquelles on obtient une frange noir au minimum d'intensité).
d'intensité).

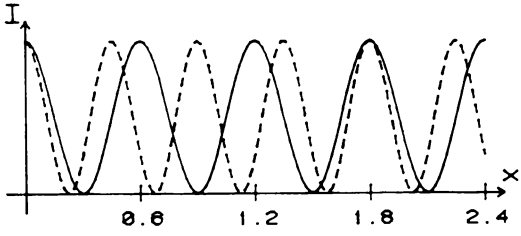
Exercice. — *Dans un dispositif de Young, les deux sources ponctuelles et cohérentes S_1 et S_2 sont placées à une distance $D = 2$ m d'un écran E sur lequel on observe les franges.*
1. La lumière utilisée est monochromatique ($\lambda = 546$ mm) et la distance séparant les quatrièmes franges brillantes de part et d'autre de la frange centrale est $x = 4{,}8$ mm. Calculer la distance S_1S_2.
2. La lumière utilisée est composée des deux radiations de longueurs d'onde $\lambda_1 = 546$ mm et $\lambda_2 = 409{,}5$ mm.
Représenter sur un schéma les deux systèmes de franges observés. Quel est l'état d'un point situé à la distance $x = 1{,}8$ mm de la frange centrale ?



1. $x = 8i = 8\frac{\lambda D}{a}$ soit $a = \frac{8\lambda D}{x} = 1{,}82$ mm.

2. $i_1 = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6$ mm

$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ soit $i_2 = i_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0{,}45$ mm



Pour x = 0,9 mm, nous avons une frange brillante pour λ_2 et une frange sombre pour d_1; seule la seconde radiation va être visible sur l'écran.
Pour x = 1,8 mm, les deux radiations vont être présentées simultanément avec un maximum d'intensité puisque toutes deux possèdent une frange brillante à cet endroit.

TESTS

VIBRATIONS

1. En utilisant la construction de Fresnel, déterminer la fonction y, somme algébrique de fonctions sinusoïdales de même fréquence :

$$y_1 = a \sin \omega t \qquad y_2 = a \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Les images d'un film se succèdent à la fréquence de 18 par seconde. Quelle doit être la vitesse d'un chariot pour que les roues qui ont un diamètre de 1,2 m et qui comportent 10 rayons paraissent immobiles ? Qu'advient-il si la vitesse est un peu plus grande ?

3. Une lame vibrante est munie d'une pointe qui frappe verticalement la surface d'un plan d'eau en un point S. Elle est animée d'un mouvement sinusoïdal de fréquence 100 Hz. L'amplitude des vibrations produites par la pointe est de 2 mm. Leur vitesse de propagation est 0,4 m/s. Si l'on néglige les phénomènes d'amortissement et de réflexion, donner l'équation du mouvement de S. (On choisit comme origine des temps l'instant où la vibration commence en S, S se dirigeant vers le haut, sens que l'on choisit comme sens positif des élongations.) Quelle est la distance d entre deux maxima successifs ?

4. L'équation du mouvement d'une particule est de la forme :

$$y = a \sin(\omega t - \varphi)$$

La période du mouvement est de 10 secondes. La trajectoire est un segment de droite de 10 cm de longueur. A l'origine des temps, la particule se meut dans le sens positif de y et se trouve décalée par rapport à sa position moyenne de 4 cm dans le sens positif.

Calculer

1) Les valeurs de α, ω et φ;

2) Le temps au bout duquel l'élongation de la particule sera de 2 cm dans le sens positif;

3) La position de la particule au temps $t = 2$ s.

5. A l'aide d'un diapason qui fournit des vibrations sinusoïdales de fréquence $N = 80$ Hz et d'amplitude $a = 1$ mm, on réalise une expérience d'interférences à la surface d'un liquide

a) Quelle est l'élongation résultante en un point M dont les distances à S_1 et S_2 sont $d_1 = 2{,}5$ cm et $d_2 = 3{,}4$ cm (préciser l'amplitude et la phase) si les ondes se déplacent à la vitesse de 0,3 m/s ?

b) Déterminer les points du segment S_1S_2 pour lesquels l'amplitude est soit maximale, soit nulle ($S_1S_2 = d = 3{,}75$ cm).

6. Un train se déplace à vitesse de 90 km/h en émettant un son de fréquence 1000 Hz. Quelle est la fréquence du son perçu par un observateur immobile avant et après son passage (célérité du son dans l'air : 340 m/s) ?

OPTIQUE

7. Quelle est la valeur d'un quantum d'énergie pour la radiation verte de la vapeur de mercure ($\lambda = 546$ nm) ?

8. Un dioptre sphérique de 5 cm de rayon sépare un milieu d'indice $n_1 = 1{,}2$ d'un milieu d'indice $n_2 = 1{,}6$. Le centre du dioptre se trouve dans le milieu d'indice n_2. Un objet AB de 1 cm de hauteur est situé dans le milieu d'indice n_1 à 3 cm du dioptre. Déterminer l'image A'B' de AB par rapport au dioptre (position, nature et grandeur).
Déterminer la position des foyers du dioptre.

9. On donne le système suivant : la face d'entrée est un dioptre-plan, séparant l'air d'indice 1 d'un liquide d'indice N, accolé à une lentille biconvexe symétrique formée de 2 dioptres sphériques de rayon R et d'indice n tels que le centre de l'un soit le sommet de l'autre et inversement.

1) Calculer les positions des foyers objet et image, F et F' du système centré ainsi constitué.

2) **Application** *: on supprime le dioptre plan (c'est-à-dire que l'on fait $N = 1$).*
Démontrer que les foyers F et F' sont symétriques par rapport à O, milieu de S_1S_2.

10.

1) On considère une lentille mince plan-convexe dont le verre a pour indice par rapport à l'air 1,52. Le rayon de courbure de sa face convexe est 25 cm. On demande la vergence et la distance focale de cette lentille.

2) Cette lentille et une autre lentille identique sont centrées sur le même axe et disposées de manière que leurs faces convexes se touchent. On demande de déterminer la position et la grandeur de l'image donnée par ce système optique d'un objet linéaire de 3 cm de longueur placé perpendiculairement à l'axe à une distance de 1 m du système. Le point A est sur l'axe.

11. Soit R le rayon de courbure des faces d'une lentille convergente symétrique et n son indice.

a) Déterminer la distance focale de cette lentille en la considérant comme très mince. Application numérique pour $R = 10$ cm $n = 1{,}5$.

b) En tenant compte maintenant de l'épaisseur de la lentille, déterminer ses foyers et ses plans principaux, en déduire sa distance focale. Application numérique pour $e = 12$ mm.

c) Comparer les distances focales calculées dans les deux hypothèses.

12. A une lentille mince convergente L_1 de 50 mm de distance focale on associe une lentille mince L_2 de 25 mm de distance focale de manière à constituer un système centré convergent de 125 mm de distance focale. Montrer que L_2 peut être convergente ou divergente. Dans chacune des hypothèses, calculer la distance e qui sépare L_1 de L_2 et faire le schéma du système; indiquer la marche d'un faisceau de rayons issus d'un point objet situé à l'infini sur l'axe du côté de L_1.

13. Un myope voit distinctement les objets situés à des distances comprises entre 5 et 50 cm. Quel type de verres doit-il utiliser pour voir nettement les objets éloignés sans accommoder ? Un second myope, qui ne distingue pas nettement les objets au-delà de 1 m utilise ces lunettes. Quelle est alors sa distance maximale de vision distincte ?

14. Un microscope est constitué par un objectif L_1 de distance focale 7 mm et par un oculaire L_2 de distance focale 18 mm, objectif et oculaire sont assimilés à des lentilles minces. Le microscope donne d'un objet AB, une image A'B' nette pour un observateur à vue normale lorsque l'intervalle optique est $\Delta = 16$ cm. Calculer la position de l'objet, le grandissement de l'objectif et la puissance intrinsèque du microscope.

15. On considère un dispositif interférentiel dans lequel les deux sources lumineuses ponctuelles et cohérentes S_1 et S_2 distantes de 1 mm sont placées à une distance $D = 1$ m d'un écran E sur lequel on observe les franges.

1) Les deux sources S_1 et S_2 émettent la même radiation monochromatique de longuer d'onde $\lambda = 0{,}6$ µm.

Calculer la différence des chemins optiques correspondant aux vibrations issues de S_1 et S_2 en un point M situé à une distance x de l'axe du système.

2) On intercale, entre S_1 et M, une lame de verre ($n = 1{,}5$) parallèle aux sources, d'épaisseur e.

Montrer que le système se déplace. Dans quel sens ? Si $d = 1$ cm, en déduire l'épaisseur de la lame.

3) On enlève la lame de verre. Les deux sources S_1 et S_2 émettent maintenant les deux radiations de longueur d'onde $\lambda_1 = 0{,}6$ µm et $\lambda_2 = 0{,}45$ µm. Qu'observe-t-on sur l'écran sur l'axe du système et en un point M quelconque ?

A quelle distance du centre se produit la première coïncidence de deux franges brillantes ?

RADIOACTIVITE

RADIOACTIVITE

Depuis 1896, date à laquelle Becquerel réussit à impressionner une plaque photographique en l'absence de lumière, le physicien a fortement progressé dans le domaine de la physique nucléaire et de ses applications. La radioactivité -propriété pour certains éléments de se transformer en d'autres éléments- est une propriété du noyau; elle n'est donc pas affectée par la combinaison chimique dans laquelle intervient l'élément radioactif.

RAPPEL SUR LA CONSTITUTION DU NOYAU

☐ **Les différents nucléons.** — Le noyau d'un atome X est constitué par A nucléons soit Z protons et donc A-Z neutrons.
A est appelé *masse du noyau.*
Z est appelé *nombre de charge* ou *numéro atomique.*
C'est ce dernier nombre qui donne le nom chimique de l'élément et permet de le positionner dans le tableau périodique de Mendéléiev.

Les masses du proton et du neutron sont sensiblement les mêmes (égales à l'unité de masse atomique : 1 U.M.A. = masse de 1/12 de carbone 12 dans son état fondamental = 931,5 MeV).
Ils diffèrent par leurs charges; le neutron ne possède aucune charge électrique alors que le proton porte la charge élémentaire + 1 (opposée à la charge portée par les électrons qui gravitent autour du noyau).
Notation : l'atome X qui comporte A nucléons dont Z protons est écrit

$$^{A}_{Z}X$$

La valeur de Z détermine le nom de l'élément.

Isotope : pour un même nombre de protons, le nombre de neutrons peut varier. Un même élément peut donc avoir des masses différentes, ce sont les différents *isotopes* de l'élément X.

$^{12}_{6}C$ représente l'isotope 12 du carbone

$^{14}_{6}C$ représente l'isotope 14 du carbone

☐ **Relation entre les nucléons.** — La population relative entre les protons et les neutrons obéit à des lois qui permettent de prévoir si un élément sera stable ou non.
Pour les atomes de faible masse atomique ($Z < 15$) le nombre de protons équilibre le nombre de neutrons. Lorsque Z augmente, le nombre de neutrons devient légèrement excédentaire.

☐ **Energie de liaison.** — Elle est mise en évidence par le fait que la masse du noyau est inférieure à la somme des masses de ses différents nucléons. Ce *défaut de masse* ΔM représente une quantité d'énergie $W = \Delta M.c^2$.
W a une valeur très grande et représente l'*énergie de liaison* ou énergie nécessaire pour éloigner les uns des autres et à l'infini les différents nucléons.

Exercice. — *Soit 3 protons et 3 neutrons groupés de 3 manières différentes :*
a) tous isolés;
b) formant un noyau d'hélium (particule α) et un noyau d'hydrogène deutéré : ${}^{4}_{2}He$ et ${}^{3}_{1}H$;
c) formant un noyau de lithium : ${}^{6}_{3}Li$.
avec Mp = 1,00727 U.M.A. et Mn = 1,00866 U.M.A.
1) Sachant que l'énergie de liaison par nucléon est de 7,074 MeV pour la particule α et de 1,1125 MeV pour ${}^{3}_{1}H$, calculer en U.M.A. la masse dans les deux premiers cas.
2) La masse de ${}^{6}_{3}Li$ est 6,01537 U.M.A., la comparer à celles des deux cas précédents.

1) Dans le cas où les 6 nucléons sont isolés

$$M_a = 3 \times 1{,}00727 + 3 \times 1{,}00866 = 6{,}04779 \text{ U.M.A.}$$

Dans le cas où ils forment une particule α et le noyau ${}^{3}_{1}H$:

$$Mb = [2Mp + 2Mn - \Delta W_{\alpha}] + [Mp + Mn - \Delta W_D]$$

où ΔW_{α} et ΔW_D représentent l'énergie de liaison pour la particule α et le noyau de Deutérium.

$$\Delta E_{\alpha} + \Delta E_D = (4 \times 7{,}074 + 1{,}1125 \times 2) \text{ MeV}$$

$$= 30{,}521 \text{ MeV} = \frac{30{,}521}{931{,}5} = 0{,}032765 \text{ U.M.A.}$$

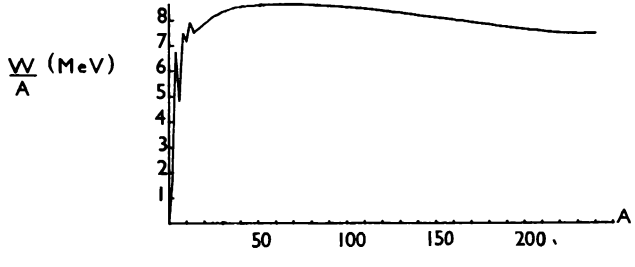
puisque 1 U.M.A. = 931,5 MeV
Soit
Mb = 6,04779 − 0,032765 = 6,015025 U.M.A.

2) Mc = 6,01537 U.M.A.
on a donc la relation

$$Ma > Mb > Mc$$

Le passage des nucléons isolés à ${}^{4}_{2}He + {}^{3}_{1}H$ libère de l'énergie, de même que le passage à ${}^{6}_{3}Li$ (phénomène de fusion nucléaire).

Variation de l'énergie de liaison en fonction du numéro atomique de l'élément. — L'énergie de liaison par nucléon $\frac{W}{A}$ n'est pas constante pour tous les éléments. La figure représente la variation en fonction de A (courbe d'Aston).



Les éléments les plus stables sont ceux pour lesquels $\frac{W}{A}$ est le plus grand. Ce sont les éléments qui sont groupés autour de $^{63}_{29}Cu$.

Lorsque l'on peut réaliser la «*fusion*» de deux éléments légers, une énergie proportionnelle au défaut de masse va être libérée. Il en sera de même si l'on réalise la «*fission*» d'un élément lourd (de masse atomique élevée) en deux éléments de masses volumiques moyennes.

☐ **Forces nucléaires.** — Si elles sont très importantes, elles n'ont qu'un rayon d'action très limité (de l'ordre de 2.10^{-15} m). Les protons, seules particules chargées du noyau, vont être, de plus, soumis à des forces répulsives de Coulomb (inférieures en module aux forces de liaison). Il existe un équilibre entre les forces attractives et répulsives. La stabilité de l'atome est due à un puits de potentiel (minimum bordé par deux barrières de potentiel).

☐ **Fission nucléaire.** — L'éclatement de noyaux lourds en noyaux de masses atomiques moyennes est obtenu en les bombardant avec des particules légères, neutrons le plus souvent, animées de grandes vitesses.
On peut obtenir par exemple la réaction

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{91}_{36}Kr + ^{142}_{56}Ba + 3(^{1}_{0}n)$$

Uranium neutron krypton baryum neutrons

La somme des masses dans le second membre est inférieure à celle du premier membre, la différence correspond à l'*énergie nucléaire* énorme, libérée au cours de la réaction de fission.

Remarque 1 : chaque fois qu'un neutron fait éclater un noyau d'uranium, trois neutrons sont libérés qui sont théoriquement capables de casser un atome d'uranium 235 et ainsi de suite. Cette réaction va donc s'effectuer de plus en plus vite : c'est la *réaction en chaîne*.
Dans une *pile atomique* les neutrons produits sont en partie absorbés pour *contrôler* la réaction.

Remarque 2 : dans la nature, l'isotope 235 de l'uranium n'est présent qu'à 0,7 % dans les minerais, le reste étant de l'uranium 238 qui ne subit pas de fission et absorbe les neutrons. Il faut donc séparer ces deux isotopes.

☐ **Fusion nucléaire.** — On peut la réaliser si l'on réussit à vaincre la répulsion électrostatique qui va s'exercer entre les noyaux légers. Cela n'est réalisé que si l'on peut les animer de vitesses très grandes, c'est-à-dire obtenir une température très élevée (de l'ordre de 20 millions de degrés). Naturellement cette température qui conduit à un état de *plasma* (mélange d'électrons et de noyaux positifs de très grandes vitesses) n'est obtenue que dans les étoiles. Expérimentalement, cette température peut être atteinte pendant un temps très court en faisant exploser une bombe atomique ou sous l'effet d'une impulsion laser.
La réaction de fusion obtenue est

$$^{3}_{1}H + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He$$

tritium hydrogène ordinaire hélium

Elle est génératrice d'une énergie considérable, mais pour l'instant, on ne connait pas encore le moyen de contrôler une telle réaction.

LES REACTIONS NUCLEAIRES

Une modification d'un noyau peut se produire d'une façon spontanée (radioactivité naturelle) ou après une interaction avec une particule (réactions provoquées). Dans les deux cas, il se produit une *réaction nucléaire.*

□ **Lois de conservation.** — Les réactions nucléaires obéissent à différentes lois.

Conservation de la charge : cette loi peut être écrite $\Sigma Z = \text{constante}$.
Pour un électron on prendra une valeur -1.

Conservation du nombre des nucléons :

$$\Sigma A = \text{constante}$$

Pour un électron on considère que $A = 0$

Exemple : Dans la réaction

$$^{14}_{7}N^{1} + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H$$

on a bien
conservation de la charge : $7 + 2 = 8 + 1$
conservation du nombre de nucléons : $14 + 4 = 17 + 1$

Conservation de la masse ou énergie : en toute rigueur on doit ajouter dans le second membre de toute réaction nucléaire un terme ΔW correspondant à la différence entre les énergies des masses au repos du premier et du second membre.
Si $\Delta W > 0$ la réaction est exoénergétique.
Si $\Delta W < 0$ la réaction est endoénergétique.

Exemple : ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}p \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}He + 17{,}33$ MeV
L'énergie libérée se retrouve sous forme d'énergie cinétique des particules α ($^{4}_{2}He$).

□ **Les différents types de radioactivité.**
Les rayons α : ils sont constitués par des noyaux d'hélium. Ils sont donc porteurs de la charge élémentaire + 2. Ils s'échappent des substances radioactives à des vitesses de l'ordre de quelques dizaines de milliers de km/s. Cette vitesse varie d'un élément radioactif à un autre. Ils sont peu pénétrants. Les chocs avec les molécules environnantes les ralentissent très rapidement.
Cette réaction se produit principalement lorsque le noyau a trop de nucléons.

Exemple :

$$^{210}_{84}Po \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{206}_{82}Pb$$

polonium particule α plomb

Les rayons β^- : ils sont émis par des noyaux légers ou de masse moyenne, quand le nombre de protons est trop petit par rapport au nombre de neutrons. Un neutron va alors se transformer en un proton (le nombre de nucléons reste contant) et un électron va être éjecté à grande vitesse (c'est la particule β^-)

$$^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e$$

La vitesse d'éjection est souvent proche de $\frac{c}{2}$, et le pouvoir pénétrant des parcules β^- est important.

La réaction précédente n'est cependant pas correcte car on s'aperçoit que les vitesses d'émission pour un même élément sont continûment variables dans un domaine étendu. Ce fait ne peut être interprété par la réaction.

En fait une autre particule est émise en même temps que la particule β^-, qui va posséder une énergie cinétique : le *neutrino*. Sa masse est négligeable devant celle de l'électron et elle ne porte pas de charge (notation : $^{0}_{0}\nu$); on a donc

$$^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\nu$$

Exemple : désintégration de $^{32}_{15}P$

$$^{32}_{15}P \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{32}_{16}S + {}^{0}_{0}\nu$$

phosphore β^{-1} soufre

Les rayons β^+ : ils sont émis, au contraire, lorsque le nombre de protons est trop important par rapport au nombre de neutrons. Un proton va alors se transformer en un neutron et un *positon* (ou électron positif) va être émis à grande vitesse. Comme lors de la désintégration β^{-1}, un neutrino est également éjecté.

$$^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\nu$$

Exemple : désintégration de $^{22}_{11}Na$

$$^{22}_{11}Na \rightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{22}_{10}Ne + {}^{0}_{0}\nu$$

sodium β^+ néon

La différence de charge des particules β^- et β^+ peut facilement être mise en évidence en utilisant un champ magnétique.

Les rayons γ : le rayonnement émis par les corps radioactifs comporte souvent une partie sur laquelle le champ magnétique n'a aucune influence. Ce sont des rayons γ, ondes électromagnétiques de longueur d'onde très faible (voir le chapitre d'optique), $\lambda_\gamma < 10^{-10}$ m.

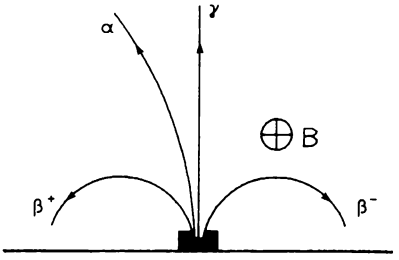
Le noyau peut se trouver dans des états d'énergie quantifiés. L'*état stable* correspond à une énergie minimale Es. Les *états excités* correspondent à des énergies plus importantes E_1, E_2, ... Lorsqu'une désintégration d'un des types précédents se produit, le noyau se retrouve souvent dans un état excité E_i. Lorsqu'il passe à un niveau d'énergie E_j plus faible ($E_i > E_j$) un rayonnement γ est alors émis; sa fréquence ν est donnée par :

$$h\nu = E_i - E_j$$

Absorption des rayons γ : la loi est exponentielle : si I_0 est l'intensité incidente l'intensité I résultante après une traversée x d'un milieu homogène est :

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

où μ est le coefficient d'absorption du milieu. Les rayons γ, à l'inverse des rayons α et β, ne seront donc jamais totalement stoppés.



Action d'un champ magnétique sur les différentes particules

□ **Cinétique des réactions radioactives.**

Constante radioactive : l'évolution dans le temps d'un ensemble d'éléments radioactifs est régie par les lois des probabilités.

Soit un nombre n_0 très grand d'atomes radioactifs. Pendant le temps dt la population va varier de : $dn = -\lambda n\, dt$

où λ est la *constante radioactive* de l'élément. λ dt représente la probabilité de désintégration pendant l'intervalle de temps dt. Cette constante ne varie pas dans le temps.

En intégrant on obtient

$$n = n_0 e^{-\lambda t}$$

λ qui est homogène à l'inverse d'un temps s'exprime en s^{-1}.

Période T : c'est le temps nécessaire pour que le nombre des atomes passe de n_0 à $\frac{n_0}{2}$.

on en déduit donc $\quad \frac{n_0}{2} = n_0 e^{-\lambda T}$

ou $\quad 2 = e^{\lambda T}$

et $\quad T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}$

Suivant l'élément, la période peut varier d'une fraction de seconde à quelques milliards d'années. Elle caractérise un élément radioactif donné.

Vie moyenne : la probabilité de vie ou vie moyenne τ d'un atome parmi le nombre d'atomes existant à un instant origine arbitraire est

$$n_0 \tau = \int_0^\infty n\, dt = N[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}]_0^\infty$$

où l'on tire $\tau = \frac{1}{\lambda} = 1{,}44\ T$

Activité : elle représente le nombre de désintégrations par seconde. C'est donc le produit λn (λn_0 au temps t = 0).

L'unité d'activité est le becquerel (Bq) qui correspond à une désintégration par seconde. On utilise encore fréquemment le curie (Ci) qui correspond au nombre de désintégrations par seconde de 1 g de radium

$$1Ci = 3{,}7\ 10^{10} \text{ désintégration par seconde}$$

$$1Ci = 3{,}7\ 10^{10}\ Bq$$
$$\text{ou } 1Bq = 2{,}7\ 10^{-11}\ Ci$$

Filiation radioactive : lorsque le noyau obtenu après la désintégration d'un autre noyau est également radioactif, on dit qu'il y a filiation. L'évolution du produit fils dépend de celle du produit père et de sa propre désintégration. Il existe quatre familles radioactives :
famille de l'Uranium ($^{238}_{92}U \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow {}^{206}_{82}Pb$),
famille de l'Actinium ($^{235}_{92}U \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow {}^{207}_{82}Pb$),
famille du thorium ($^{232}_{90}Th \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow {}^{208}_{82}Pb$),
famille du plutonium ($^{241}_{94}Pu \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow {}^{209}_{83}Bi$).

Seules les trois premières familles sont «naturelles».

DETECTION DES RAYONNEMENTS

L'importance de la radioactivité pour l'homme est telle qu'il est nécessaire de la mettre en évidence et d'évaluer son intensité.

□ **Détecteurs à gaz.** — Dans un gaz, une particule chargée animée d'une grande vitesse y produit une perturbation. Des électrons peuvent être arrachés aux atomes qui deviennent des ions porteurs de charges. Sous l'influence d'un champ électrique, on peut accélérer ces particules. Si l'énergie de la particule incidente est plus faible, l'atome peut passer dans un état excité et un rayonnement électromagnétique est alors émis (transition électronique).

Chambre d'ionisation : deux électrodes soumises à une faible différence de potentiel limitent une chambre contenant un gaz. Les particules incidentes ionisent le gaz. Les charges sont alors attirées vers les électrodes et la d.d.p. est modifiée. La chambre est reliée à un amplificateur et les impulsions produites peuvent être décelées.

Compteur proportionnel : c'est une chambre d'ionisation particulière dans laquelle l'électrode négative est cylindrique, l'axe étant occupé par un fil métallique fin qui sert d'électrode positive. Aux abords de ce fil le champ électrique est très important. Lorsque l'on augmente la d.d.p., les électrons

sont capables d'ioniser le gaz et les ions et les électrons sont alors multipliés, ceci proportionnellement à la d.d.p. appliquée aux électrodes.

Compteur de Geiger Muller : si la d.d.p. augmente encore, la proportionnalité n'existe plus. Un «plateau» apparaît. Cet appareil fonctionne donc en tout ou rien et ne peut donc servir à la spectrométrie.

□ **Détecteurs solides.**

Compteur à scintillations : certaines substances donnent naissance à des radiations électromagnétiques du domaine visible ou ultraviolet lorsqu'elles sont frappées par des particules (les atomes passent dans un état excité et le retour à l'état stable se produit par une émission de lumière de fluorescence). Les photons émis atteignent la cathode photosensible d'un photomultiplicateur. Celui-ci amplifie alors le phénomène et l'énergie électromagnétique est transformée en énergie électrique. A l'inverse des compteurs à gaz, efficaces surtout pour les particules α et β, les compteurs à scintillations peuvent atteindre un rendement de 100 %, même pour les rayons γ.

D'autres types de détecteurs peuvent également être utilisés (plaque photographique, chambre à détente) mais sont beaucoup moins utilisés.

APPLICATIONS DE LA RADIOACTIVITE

Il n'est pas question dans cet abrégé de développer ce paragraphe, les livres de biophysique pourront être consultés à ce sujet. On peut simplement noter que les applications des différents rayonnements sont multiples :

- en *biologie* (marquage des molécules pour une détection ultérieure),
- en *médecine* (vaccins inactivés, diagnostic, radioimmunodosage, produits radiopharmaceutiques, thérapeutiques, stérilisation des produits médicaux),
- en *agronomie* (lutte contre les insectes par stérilisation, mutations génétiques, conservation des aliments),
- en *géologie et archéologie* (datation des minerais et des bois fossilisés ou antiques),
- dans l'*industrie* (radiographie des pièces, détection des fumées, sources lumineuses),
- conservation des *œuvres d'art*.

TESTS

1. *Soit la réaction de fusion*

$$^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He$$

a) calculer le défaut de masse du système.
b) Quelle est l'énergie libérée si 1 g de dentérium est utilisé ?
$M(^{2}_{1}H)$ = 2,014102 U.M.A., $M(^{4}_{2}He)$ = 4,002603 U.M.A.

2. *La plutonium $^{239}_{94}Pu$ se désintègre pour donner de l'uranium $^{235}_{92}U$; quelle est la particule émise ?*

3. *Le plomb $^{214}_{82}Pb$ se désintègre en émettant des rayons β^-; écrire la réaction et caractériser l'élément obtenu.*

4. *En bombardant l'aluminium 27 par des noyaux d'hélium, on obtient un proton et un nouvel élément radioactif. Ecrire la réaction et caractériser l'élément obtenu.*

5. *Calculer l'énergie obtenue lors de la désintégration du radium $^{226}_{88}Ra$ en radon $^{222}_{86}Rn$.*
M(Ra) = 226,096 U.M.A.
M(Rn) = 222,087 U.M.A.
M(α) = 4,0026 U.M.A.

6. *Calculer les durées de vie moyenne du cobalt 60 et du chrome 51 dont les périodes sont 5,2 ans et 27,8 j.*

7. *L'iode 131 ($^{131}_{53}I$) se décompose par désintégration β^-. Sa période est de 8,14 jours. Calculer la masse d'iode correspondant à une activité de 1 mCi.*

8. *Le mercure 203 a une période de 43 jours.*
   - Calculer sa constante radioactive λ.
   - Quelle est, en Ci, l'activité de 1 gramme de ce corps ?

9. *Le molybdène 99 se décompose en donnant naissance au technetium 99 très utilisé en médecine.*
   - Ecrire l'équation de désintégration, quel est le rayonnement émis ?
   - On veut disposer d'une dose de 100 μCi, 33 h après la commande, quelle masse de molybdène doit-on commander ?
   Période du molybdène 99 = 66 h.

REPONSES AUX TESTS

MECANIQUE

1. $\vec{v}(2t; \frac{1}{2}(e^{-2t} - 1); 3 \sin t)$; $\vec{OM}(t^2; \frac{1}{4}(1 - 2t - e^{-2t}); -3 \cos t)$

2. $F = 5.10^5$ N ; $\frac{F}{mg} \cong 5$

3. a) $\frac{v_1^2}{R} \geqslant g \Rightarrow v_1 \geqslant \sqrt{g R}$

   b) $\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 - 2 g R \Rightarrow v_0^2 \geqslant 5 g R$

   $v_0 \geqslant 15{,}8$ m.s^{-1} $\cong$ 57 km/h

4. 36000 km

5. 2.10^{30} kg

6. a) $m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + K x = F_0 \cos \omega t$

   ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$

   b) même méthode que pour un circuit R, L, C (Electricité) :

   $tg\varphi = \frac{\Gamma \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$ $A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}}$

7. a) $\frac{dh}{dt} = -\sqrt{2g} \frac{s}{S} \sqrt{h}$

   b) $t = \frac{2 S}{\sqrt{2g}\, s} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h})$

   $h = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{S}{s} = 4515$ s $= 75$ mn 15 s

8. $Re = \frac{4\rho}{\mu \pi d} Q$ $Q^* = \frac{\mu \pi d}{4\rho} Re^* = 1{,}6.10^{-4}$ m^3.s^{-1} $= 0{,}16$ l/s

9. $A = \frac{\rho g r h}{2} = 33.10^{-3}$ N.m^{-1}

10. a) $\gamma \cong 4.10^6$ m.s^{-2} $\frac{\gamma}{g} \cong 4.10^5$

    b) $\left.\begin{array}{l} v = \gamma S \\ l = v t \end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{l}{\gamma t} = \frac{2.10^{-2}}{4.10^6 . 270} = 185.10^{-13}$ s

THERMODYNAMIQUE

1. Ouvert.
2. $V = 4{,}113$ l.
3. $L_v = 9700$ cal.mol^{-1} $= 40546$ J.mol^{-1}.
4. $\Delta W = 3040$ J.
5. Voir pages 65 et 74
6. $\Delta U = 10450$ J.
7. $\Delta U = \Delta H = 0$ (T ne varie pas).
8. $\Delta H = 380$ kJ.
9. Une réaction exergonique se fait spontanément ($\Delta G < 0$), une réaction endergonique ne peut avoir lieu sans apport d'énergie de l'extérieur ($\Delta G > 0$).
10. $\Delta\sigma = 1{,}13$ J.K^{-1}.

ELECTRICITE

1. $$E \times 4\pi r^2 = \begin{cases} 0 \text{ si } r < R \Rightarrow E = 0 & \text{si } r < R \\ Q \text{ si } r > R \Rightarrow E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{si } r > R \end{cases}$$

2. En mesure algébrique, on a :

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right] \qquad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] \text{ si } x > a$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right] \qquad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

si $-a < x < a$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2}\right] \qquad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a}\right]$$

si $x < -a$

3. a) $S = \dfrac{eC}{\varepsilon_0} = 10.10^{-6}.10.10^{-9}.36\pi.10^9 = 1{,}13.10^{-2}$ m^2 $= 113$ cm^2

   b) $V_m = E_m.e = 32.10^5.10.10^{-6} = 32$ volts.

4. a) $I_M = \dfrac{r+R}{R} i_m \Rightarrow R = r = 1\ \Omega$

   b) $0{,}5\ \Omega$

   c) dans les deux cas, $V = r\, i_M = 10$ mV

5. a) $v = E(1 - e^{-t/RC}) = 10(1 - e^{-10^3 t})$ volts

b) $v = \frac{E\,R}{R + R'} e^{-(R+R')t/RR'C} + \frac{E\,R'}{R + R'} = \frac{100}{12} e^{-6.10^{-3}t} + \frac{10}{6}$ volts

c) $\tau_1 = 10^{-3}$ s $\qquad \tau_2 = \frac{10^3}{6} = \frac{\tau_1}{6}$

6. a) $I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{220}{\sqrt{10^2 + 10^{-2}.(2\pi.50)^2}} = \frac{220}{10\sqrt{11}} = 2\sqrt{11} = 6{,}6$ A

b) $\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow \varphi \cong 72{,}5°$

c) $P = V\,I\cos\varphi = 220.2\sqrt{11} \times \frac{1}{\sqrt{11}} = 440$ W $= R\,I^2$

7. a) $\rho\frac{4}{3}\pi R^3 g = 6\pi\mu R v$ (ρ = masse volumique de l'huile)

b) $q E + \rho\frac{4}{3}\pi R^3 g = 6\pi\mu R v'$

$$q = \frac{6\pi\mu R(v' - v)}{E} = \frac{6\pi\mu R(v' - v)l}{V} = -10.1{,}6.10^{-19}\text{ C} = -10$$

8. a) $R = \frac{m\,v_0}{e\,B}$

b) $2\pi R = v_0 T \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{e\,B}$ indépendante de T

9. $\vec{F} = \int I(\vec{dl} \wedge \vec{B}) \Rightarrow F = I\,l\,B$

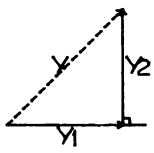
La force est orthogonale à la tige, dans le plan des rails.

10. a) en valeur absolue : $e = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow i = \frac{e}{R} = \frac{1}{R} B\,l \frac{dx}{dt}$

b) $-kx - i\,l\,B = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B^2l^2}{R}\frac{dx}{dt} + kx = 0$

même type d'équation que pour un point soumis à une force de frottement.

1. $y = y_1 + y_2 = a\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$



2. $v = 6{,}8$ m/s $= 24{,}4$ km/h
La roue tourne lentement dans le bon sens.

3. $y = 0{,}002 \sin 200\,\pi t$

$d = vT = \frac{v}{N} = 4.10^{-3}$m

4. 1) $a = 8$ cm $= 8.10^{-2}$ m ; $\omega = 0{,}2\pi$; $\varphi = +30°$
2) $t = 1{,}23$ s
3) $y = +5{,}35$ cm.

5. a) $y = 2a \cdot \cos\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda} \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi(d_2 + d_1)}{\lambda})$

$= 6.10^{-4} \cdot \sin(502{,}7.t - 15{,}73.\pi)$

Amplitude (en m) phase

b) Points d'amplitude maximale :

$d_2 + d_1 = d$
$d_2 - d_1 = k\lambda = k \times 0{,}375$

$d_2 = \frac{d}{2} + k\frac{\lambda}{2} = \frac{3{,}75 + k \times 0{,}375}{2}$

$-10 < k < +10$

Il y a 21 valeurs pour k et 21 franges à amplitudes maximales (schéma similaire à celui de la page 159) espacées de $\frac{3{,}75}{20} \cong 0{,}19$ cm les une des autres.

Les franges d'amplitudes nulles sont intercalées régulièrement entre les précédentes et sont donc au nombre de 20.

6. $v = 90$ km/h $= 25$ m/s
Avant la rencontre : Après la rencontre

7. $N' = 1000 \times \dfrac{340 - 0}{340 + 25} = 1079{,}6$ Hz $\quad N' = 1000 \times \dfrac{340 - 0}{340 + 25} = 931{,}5$ Hz

$$W = h.v = h.\frac{c}{\lambda} = 6{,}62.10^{-34} \times \frac{3.10^{8}}{546.10^{9}} = 3{,}6.10^{-19} \text{ J}$$

8. L'image est telle que SA' $= -5$ cm
Elle est virtuelle, de même sens que AB et A'B' $= 1{,}25$ cm
SF' $= 20$ cm $\quad$ SF $= -15$ cm

9. 1) $$OF' = \frac{n^2 + N}{n^2 - N}\frac{R}{2}$$ position du foyer image

$$OF = \frac{N - n^2 - 2}{n^2 - N}\frac{R}{2}$$ position du foyer objet

2) **Application :** $\overline{OF'} = -\overline{OF} = \dfrac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\dfrac{R}{2}$

10. 1) $V = 2{,}08$ dioptries
$f' = 48$ cm
2) OA' $= p' = 31{,}6$ cm, image réelle renversée
A'B' $= -0{,}948$ cm ($\varphi = -0{,}316$)

11. a) $f' = 10$ cm
b) $\overline{S_2F'} = 9{,}8$ cm $\quad \overline{S_2H'} = -0{,}4$ cm
$\overline{S_1F} = -9{,}8$ cm $\quad \overline{S_1H} = +0{,}4$ cm
c) $\overline{HF} = -10{,}2$ cm $\quad$ distances focales supérieures
$\overline{H'F'} = +10{,}2$ cm $\quad$ pour le système centré.

12. 1) **L_2 convergente :** $e = 65.10^{-3}$ m
2) **L_2 divergente :** $e = 35.10^{-3}$ m

13. • verres divergents
F' doit être au PR (50 cm) ($f' \cong 50$ cm)
• PR virtuel situé à 1 m en arrière de l'œil (le sujet est devenu hypermétrope).

14. • $\overline{O_1A} = -0{,}73$ cm
• Grandissement de l'objectif : $-22{,}9$ (image renversée)
• Puissance intrinsèque : 127 dioptries.

15. 1) $$\delta = \frac{ax}{D} = 10^{-3}.x$$

$$i = \frac{\lambda D}{a} = 0{,}6.10^{-3} \text{ m} = 0{,}6 \text{ mm}$$

2) Déplacement vers le haut (du côté de S_1)

$$d = \frac{(n-1)e.D}{a} \text{ ou } e = \frac{d.a}{(n-1).D} = 0{,}02 \text{ mm}$$

3) Sur l'axe : franges brillantes pour les deux radiations.
Première coïncidence à $x = 1{,}8$ mm.

RADIOACTIVITE

1. a) 0,0256 U.M.A. = 24 MeV
   b) $6{,}3.10^{10}$ J

2. $^{239}_{94}Pu \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{235}_{92}U$
   particule α

3. $^{214}_{82}Pb \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{214}_{83}Bi$ (Bismuth)

4. $^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{30}_{14}Si + {}^{1}_{1}p$
   silicium

5. $^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He + W$

   $W = 6$ MeV

6. $\tau(Co) = 7{,}5$ ans
   $\tau(Cr) = 40{,}1$ j

7. $n\lambda = 3{,}7.10^{7}$ (activité)

   $$n = 3{,}7.10^{7} \times \frac{T}{0{,}693} = 3{,}75.10^{13} \text{ noyaux}$$

   $$m = \frac{n\,A}{\mathcal{N}} = 8{,}17.10^{-9} \text{ g}$$

8. * $1{,}87.10^{-7}$ s^{-1}
   * 15.10^{3} Ci

9. * $^{99}_{42}Mo \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{99}_{43}Tc$
   désintégration β^-

   * 33 h $= \frac{T}{2}$, Activité lors de la commande = 14 μ Ci

   m = $0{,}3.10^{-9}$ de ^{99}Mo

INDEX ALPHABETIQUE

DES MATIERES

Abbe (formule d'), 176.
Archimède (poussée d'), 41.

Battements, 161.
Bernouilli (formule de), 42.
Biot et Savart (loi de), 139.

Capacité électrique, 104.
Capacité calorifique, 63.
Cellule d'électrolyse, 89.
Centre de gravité, 36.
Chaleur, 63.
Chaleur latente, 64.
Champ électrique, 96, 103, 134, 136.
Changements d'états, 90.
Champ magnétique, 136, 139.
Compton (effet), 31.
Constante d'équilibre, 84, 87.
Coulomb (loi de), 94.

Descartes (loi de), 173.
Diélectrique, 107.
Dioptre plan, 178.
Dioptre sphérique, 181.
Doppler (effet), 167.
Dynamique (principe), 12.

Ecoulement laminaire, 45.
Electrochimie, 88.
Elongation, 148.
Energie, 62.
Energie cinétique, 21, 40.
Energie interne, 65.
Energie libre, 80.
Energie mécanique, 25.
Enthalpie, 71.
Enthalpie libre, 74.

Fermat (principe de), 174.
Fission, 210.
Fourier (théorème de), 152.
Foyers, 182, 186.
Franges d'interférences, 158.
Fresnel (représentation de), 153
Frottement, 13, 35.
Fusion, 210.

Gauss (théorème de), 98.

Hall (effet), 138.

Impédance, 131.
Irréversible, 78.
Interférences, 156, 200.

Joule (loi de), 117, 124.
Jurin (loi de), 52.

Kirschoff (loi de), 114.

Lame à faces parallèles, 178.
Laplace (loi de), 141.
Lentilles minces, 185.
Lenz (loi de), 143.
Loupe, 196.

Métabolisme basal, 70.
Microscope, 198.
Miroirs plans, 177.
Moment cinétique (théorème du), 19.
Moment dipôlaire, 102.
Moment d'inertie, 39.

Noyau, 208.

Oeil, 192.
Ohm, 111.
Ondes électromagnétiques, 170.
Ondes stationnaires, 162.

Phénomènes périodiques, 148.
Pile, 89.
Poiseuille (loi de), 46.
Potentiel, 23.
Potentiel électrostatique, 99, 103.
Potentiel chimique, 84.
Potentiel d'électrode, 89.
Pression, 42, 56.
Principe, 66, 74, 80.
Principe de superposition, 154.
Prisme, 179.
Propagation des mouvements vibratoires, 149.
Puissance, 21, 117, 133.

Quantité de mouvement, 29.

Réactions nucléaires, 211.
Régime permanent, 17.
Régime transitoire, 16, 123.
Rendement énergétique, 82.
Réversible, 78.
Reynolds (nombre de), 48.

Sédimentation (vitesse de), 49.
Sinusoïdes des temps, des espaces, 151.
Solutions idéales et réelles, 85.
Son, 165.
Sources de lumière, 171.
Stigmatisme, 176.
Stokes (loi de), 49.
Stroboscopie, 155.
Sverdberg, 50.
Système, 58.
Système centré, 189.

Température, 57.
Tension superficielle, 51.
Travail, 19, 64, 101, 142.

Venturi (tube de), 44.
Vergence, 188.
Viscosité, 46.

MASSON, Editeur
120, bd St-Germain
75280 Parix Cedex 06
4e trimestre 1980

Imprimé en France

Imprimerie PIERRON
57206 Sarreguemines
Dépôt légal :
4e trimestre 1980
N° 364